

Matura 1896

oder: auch Genies waren einmal Schüler

Nachfolgend sind zwei Seiten aus der Matura- (Abitur-) Arbeit von Albert Einstein¹ aufgeführt, die er im Frühjahr 1896 an der Alten Kantonsschule Aarau (Schweiz) abgelegt hat.²

Beim Studium der Bearbeitung der Aufgabe 1 sind natürlich mehrere Voraussetzungen zu beachten: Albert Einstein schrieb in deutscher Schrift, der Text ist deshalb nur schwer zu entziffern und die Aufgabenstellung war höchstwahrscheinlich nur handschriftlich an der Tafel im Prüfungsraum vorhanden (es gab keinen Kopierer!). Selbstverständlich standen Albert Einstein für Funktionswerte trigonometrischer Funktionen, komplexe Multiplikationen, Potenzierungen und Wurzelziehen nur eine Logarithmentafel (kein Taschenrechner!) sowie sicherlich eine Formelsammlung zur Verfügung (möglicherweise auch ein Rechenschieber).

Der aus der Bearbeitung erschlossene, mögliche Aufgabentext:³

Von einem Dreieck kennt man den Radius r des Außenkreises, sowie das Verhältnis $h_a : h_b : h_c$ der Höhen zueinander; man ermittle die Winkelgrößen des Dreiecks und die Länge der Seite a .

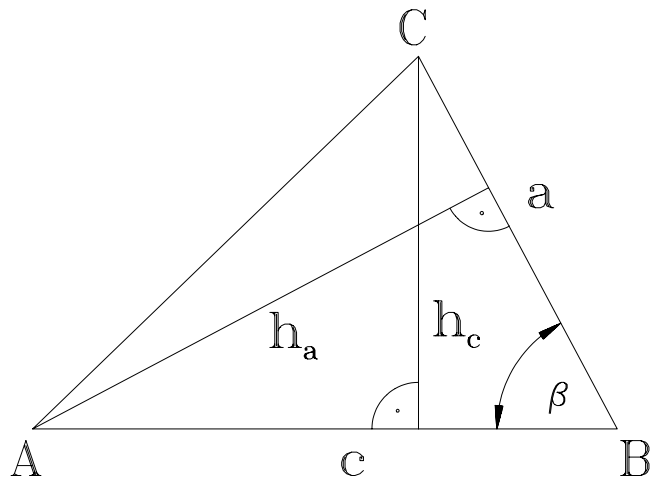
Gegeben sind (unter Verzicht auf Einheiten): $r = 10$, $h_a : h_b : h_c = 2:3:4$

Wir wollen versuchen, erst am Ende einer eigenen Bearbeitung unsere Ergebnisse mit denen von Albert Einstein zu vergleichen.

Beim gegebenen Verhältnis der Höhen sollten wir uns an einen Sachverhalt aus der Ähnlichkeitslehre der Klassenstufe 9 erinnern. Es gilt:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

Begründe zunächst den obigen Sachverhalt noch einmal und gib danach mindestens zwei mögliche Tripel von Dreiecksseiten an, welche die gegebene Bedingung erfüllen.



Da ähnliche Dreiecke kongruente Winkel besitzen, berechne nun mit einem Tripel möglicher Dreiecksseiten (z.B. $a = 6$, $b = 4$ und $c = 3$) die Größen der 3 Innenwinkel des gesuchten Dreiecks.

Tipp: Kosinussatz !

Bestätige die Ergebnisse: $\alpha \approx 117,2796^\circ$; $\beta \approx 36,3361^\circ$; $\gamma \approx 26,3843^\circ$

Gib die Winkelgrößen auch in der Schreibweise mit den zugehörigen Winkelminuten und Winkelsekunden an.

¹ * 14. März 1879 in Ulm; † 18. April 1955 in Princeton, New Jersey; trage in geeigneten Quellen mehr Informationen über das 'Genie' Albert Einstein zusammen!

² Copyright © Staatsarchiv Aargau (Schweiz), Signatur StAAG DE/KS05/1896/2270

³ Aufgabe 3 der Maturaarbeit findet man im Arbeitsblatt: "Zwei historische Reminiszenzen" - 'cardano.pdf', Aufgabe 2 behandelt Schnittpunkts-/Berührungspunktbedingungen eines Systems von Kreisen mit einer Ellipse.

Matura 1896

oder: ... auch Genies waren einmal Schüler

Wie nun weiter?

Wir erinnern uns an den nebenstehend skizzierten Sachverhalt der Kreisgeometrie.

$$\overline{BC} = 2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

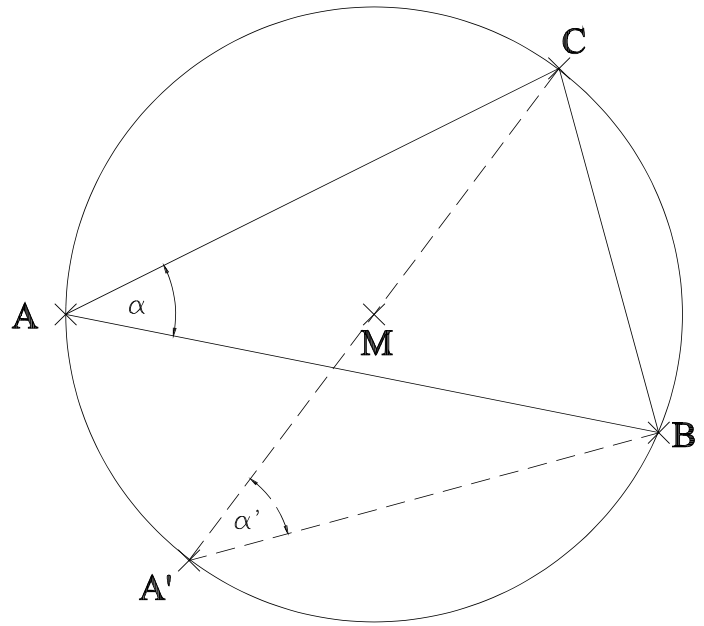
Begründe die obige Gleichung und zeige, dass sie auch im Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks richtig ist.

Bestätige, dass damit für die drei Seiten des gesuchten Dreiecks gilt:

$$a \approx 17,78$$

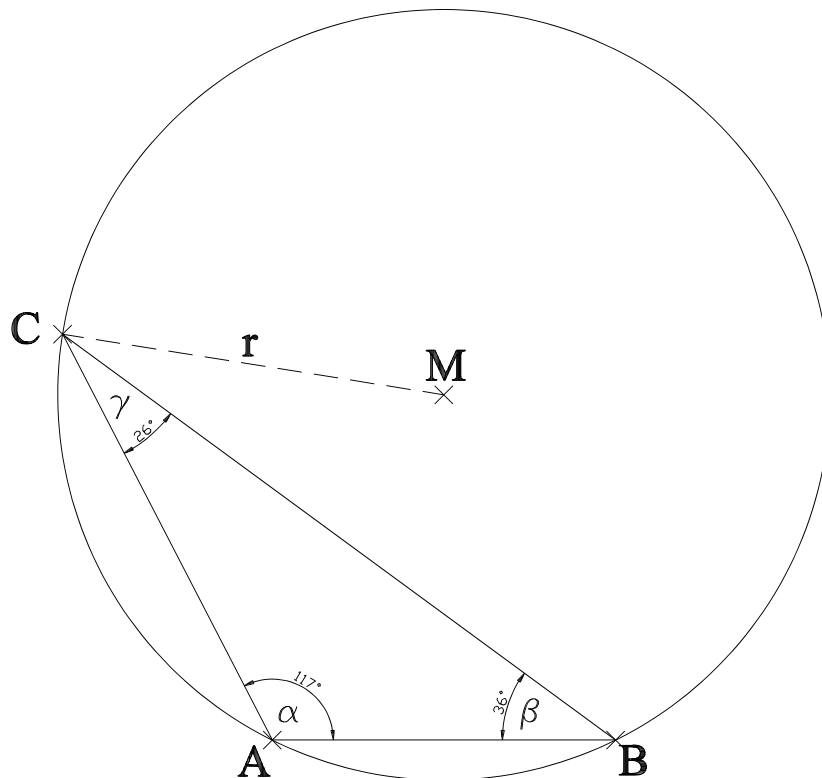
$$b \approx 11,85$$

$$c \approx 8,89$$



Vergleiche nun mit dem Vorgehen und den Ergebnissen von Albert Einstein. - Wie viel mühsamer war es doch seinerzeit ohne Taschenrechner!

Wo sind eigentlich die drei Höhen? - Zeichne sie ein!



Albert Einstein
6.

Aufgabe 1.

Da sind die Seiten eines Dreiecks
einanderfolgend anzuordnen wie die zugänglichen
Größen, so ist

$$a = \frac{1}{h_1} K = \frac{1}{2} K$$

$$b = \frac{1}{h_2} K = \frac{1}{3} K$$

$$c = \frac{1}{h_3} K = \frac{1}{4} K$$

Da es zur Bestimmung der Winkel
nicht auf das Verhältnis der Seiten an-
kommt, so wählen wir das zweifache
von den gegebenen K mit den Seiten
6, 4 & 3 für K .

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-36 + 16 + 9}{24}$$

$$\cos \alpha = -\frac{11}{24}$$

$$\sin(\alpha - 90) = 0,4583$$

$$\lg \sin(\alpha - 90) = 9,66175 - 10$$

$$\alpha - 90 = 27^\circ 16' 22''$$

$$\alpha = 117^\circ 16' 22''$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{29}{36} = 0,8055$$

$$\lg \cos \beta = 9,9061 - 10$$

$$\beta = 36^\circ 20'$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{43}{48}$$

$$\lg \cos \gamma = 9,95226 - 10$$

$$\gamma = 26^\circ 23'$$

$$\begin{array}{r} 117 \ 16 \ 22 \\ 36 \ 20 \\ 26 \ 23 \\ \hline 179 \ 55 \ 22 \end{array}$$

Berechnung der Seite a

Da α stumpf, so ist

$$a = 2r \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$$

Fehler im Abschreiben, $\log a = \log 20 + \log \sin(64^\circ 43' 38'')$

Resultat richtig: $= 1,30103 + 9,94884 - 10$

$$= 1,24987$$

$$\cdot a = \underline{17,77}$$

Aufgabe 2.

Man nehme zwei dem Abstand p entgegengesetzte Punkte P_1 und P_2 im ebenen System vom Mittelpunkte M , so ist sein Radius $\sqrt{r^2 - p^2}$.

Seine Gleichung ist:

$$(x - p)^2 + y^2 = r^2 - p^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = r^2 - p^2$$

$$x^2 - 2px + y^2 = r^2 - 2p^2$$

Dies liefert man der Gleichung der Kreislinie,

das ist dann derjenige Kreis, welcher die Punkte

der beiden p einander gegenüberliegend

verbindet. Für den Mittelpunkt muß offenbar

einmal $d(p)$ das Abstand

von x und y identisch 0 sein.

$$\text{Also } x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 = 0$$

$$x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2(-2x + 4p)dp = 0$$

$$\text{Daher: } 4p - 2x = 0$$