Platonische Körper

Die Pyramiden sind Sonderfälle von Polyedern. Das Polyeder (oder Vielflach) ist ein Körper, der von ebenen Flächen begrenzt ist. Je nachdem, wie viele Flächen das Polyeder hat, heißt es Tetraeder (Vierflach), Pentaeder (Fünfflach), Hexaeder (Sechsflach) usw.

Dem Schweizer Mathematiker Leonhard **EULER** (1707 bis 1783) verdanken wir die Wiederentdeckung eines Satzes, den vermutlich schon **ARCHIMEDES** (285 bis 212) gekannt hat, den **Polyedersatz von EULER:**

Hat ein konvexes Polyeder F Flächen, E Ecken und K Kanten, so gilt: F + E - K = 2.

Bei konkaven Polyedern können sich für F + E - K auch Zahlen ergeben, die größer als zwei sind. Von ästhetisch und mathematisch hohem Reiz sind die regelmäßigen Polyeder. Unter einem regelmäßigen Polyeder versteht man einen konvexen Körper, dessen Flächen aus endlich vielen regelmäßigen Vielecken bestehen. Erstaunlicherweise gibt es nur fünf regelmäßige Polyeder.

Nach der Überlieferung kennen schon **PYTHAGORAS** (580 bis 496) und seine Schüler das Tetraeder, den Würfel und das Dodekaeder. **THEAITETOS** (416 bis 369), Freund und Schüler **Platons**, konstruiert diese Körper, entdeckt das Oktaeder und Ikosaeder und beweist als erster, dass es nicht mehr als fünf regelmäßige Körper geben kann.

Bei einem regelmäßigen Polyeder stoßen an jeder Ecke gleich viele Kanten zusammen. Wir wollen die Winkelsumme der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten betrachten. Diese Winkelsumme muß stets kleiner als 360° sein! (Begründung?)

Bildet man ein konvexes Polyeder aus gleichseitigen Dreiecken, so ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten 60° groß. Die Winkelsummenbedingung läßt sich also für 3 Kanten (180° < 360°; Tetraeder), für 4 Kanten (240° < 360°; Oktaeder) und für 5 Kanten (300° < 360°; Ikosaeder) erfüllen.

Bildet man ein konvexes Polyeder aus gleichseitigen Vierecken (Quadraten), so ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten 90° groß. Die Winkelsummenbedingung läßt sich damit nur für 3 Kanten (270° < 360°; Hexaeder (Würfel)) erfüllen.

Bildet man ein konvexes Polyeder aus gleichseitigen Fünfecken, so ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten 108° groß. Die Winkelsummenbedingung läßt sich damit wiederum nur für 3 Kanten (324° < 360°; Dodekaeder) erfüllen.

Da an jeder Ecke mindestens 3 Kanten zusammenstoßen müssen ist die Winkelsummenbedingung mit regelmäßigen n-Ecken für n > 5 unerfüllbar, weil ein Innenwinkel im regelmäßigen 6-Eck schon 120° groß ist!

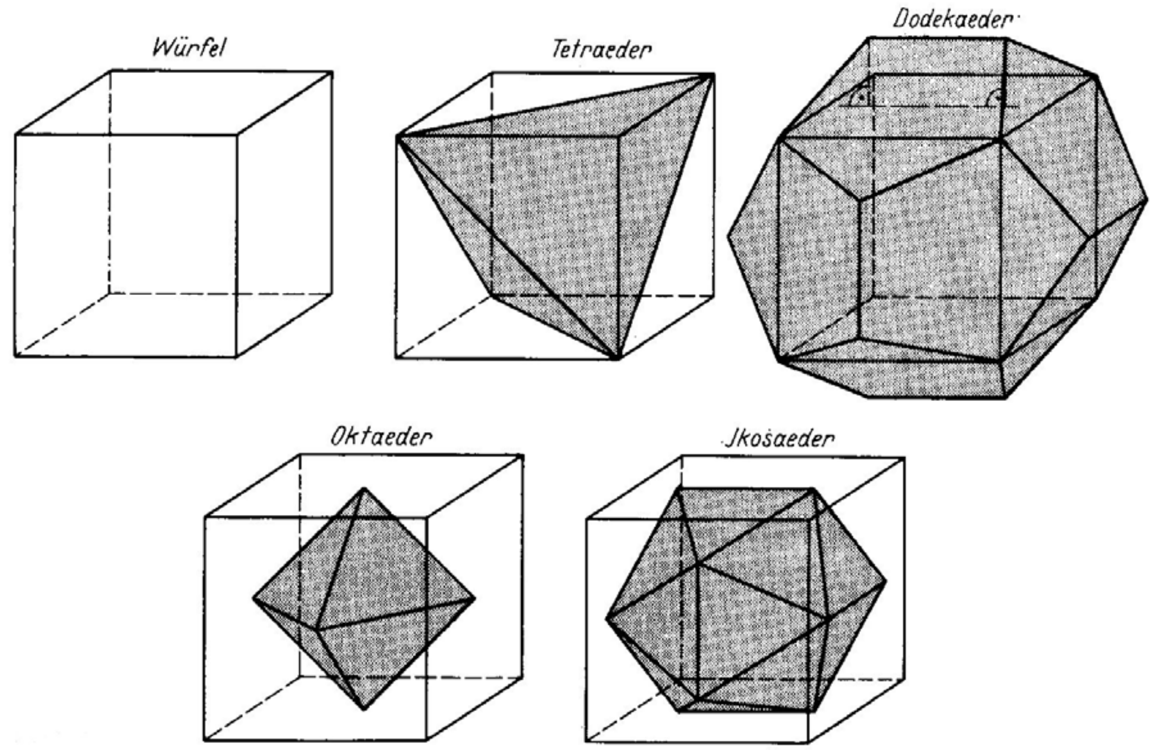
PLATON (427 bis 347) ist von den Gedanken des **THEAITETOS** so beeindruckt, dass er in seiner Deutung der Natur auf die fünf regelmäßigen Polyeder zurückgreift. Grundlage bilden die Lehre von **EMPEDOKLES** (490 bis 430), wonach die Welt aus vier Elementen besteht, und die Lehre von **DEMOKRITOS** (460 bis 370), wonach ein Stoff aus nicht teilbaren Bausteinen, den Atomen, zusammengesetzt ist.

Platonische Körper

Nach **PLATON** haben die Atome eines Elements die Gestalt eines regelmäßigen Polyeders:

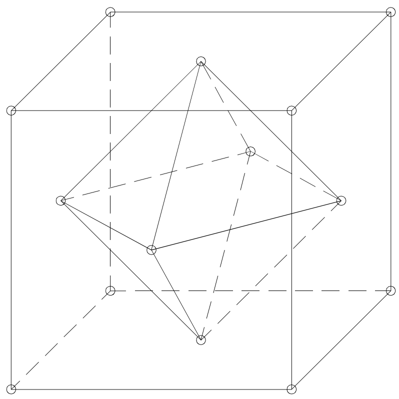
Element	Gestalt der Atome	Deutung
Erde	Würfel	Quadrate für quaderhaft fest
Wasser	Ikosaeder	Dreiecke für flüchtig
Feuer	Tetraeder	leicht beweglich
Luft	Oktaeder	

Übrig bleibt das Dodekaeder. Ihm ordnet Platon das Weltall zu: Jeder der zwölf Seitenflächen entspricht eines der zwölf Sternbilder. Seitdem heißen die fünf regelmäßigen Körper auch **Platonische Körper.**



	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Anzahl der Ecken der Polygonflächen	**3**	**4**	**3**	**5**	**3**
Anzahl der Flächen in einer Ecke	**3**	**3**	**4**	**3**	**5**
Anzahl der Flächen	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**
Anzahl der Ecken	**4**	**8**	**6**	**20**	**12**
Anzahl der Kanten	**6**	**12**	**12**	**30**	**30**
F + E - K	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**

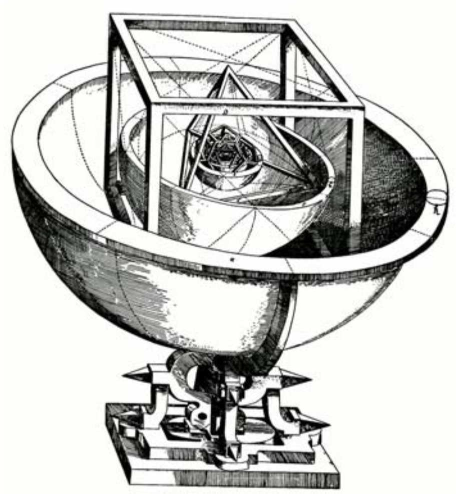
Platonische Körper



Nimmt man die Mittelpunkte von Umkreisen der Seitenflächen als Eckpunkte eines (einbeschriebenen) Polyeders, so sind Würfel und Oktaeder zueinander dual, ebenso wie Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder ist zu sich selbst dual.

Jeder platonische Körper besitzt eine Innenkugel, auf der die Mittelpunkte sämtlicher Flächen des Körpers liegen und eine Außenkugel, auf der sämtliche Körperecken liegen.

Diese Eigenschaft nutzte Johannes **KEPLER**[1] 1596 in seinem Jugendwerk **Mysterium Cosmographicum** aus, um die Abstände der damals sechs bekannten Planeten des Sonnensystems zu erklären.



Alle Planeten beschrieben danach Kreisbahnen auf Kugelschalen. Zwischen diese sechs Kugelschalen passte Johannes Kepler die platonischen Körper so ein, dass jeweils eine Kugel Innenkugel des Körpers und die folgende Kugel Außenkugel des Körpers war.
Das Verhältnis der Radien zwischen Innen- und Außenkugel gab das Verhältnis der Abstände benachbarter Planeten zur Sonne wieder.

Die kopernikanischen Abstandsdaten legten schließlich die Anordnung fest. Danach lag das Oktaeder zwischen Merkur und Venus, das Ikosaeder zwischen Venus und Erde, das Dodekaeder zwischen Erde und Mars, das Tetraeder zwischen Mars und Jupiter und der Würfel zwischen Jupiter und Saturn.

Um das Problem der Bahnexzentrizitäten mit zu berücksichtigen, ging Johannes Kepler von einer gewissen Dicke der Kugelschalen aus.

Später verwarf Johannes Kepler die gesamte Theorie als er entdeckte, dass sich Planeten nicht auf Kreisbahnen sondern auf Ellipsenbahnen bewegen.

---

[1] ✳ 27.12.1571 Weil der Stadt; ✝ 15.11.1630 Regensburg