Pyramidenvolumen

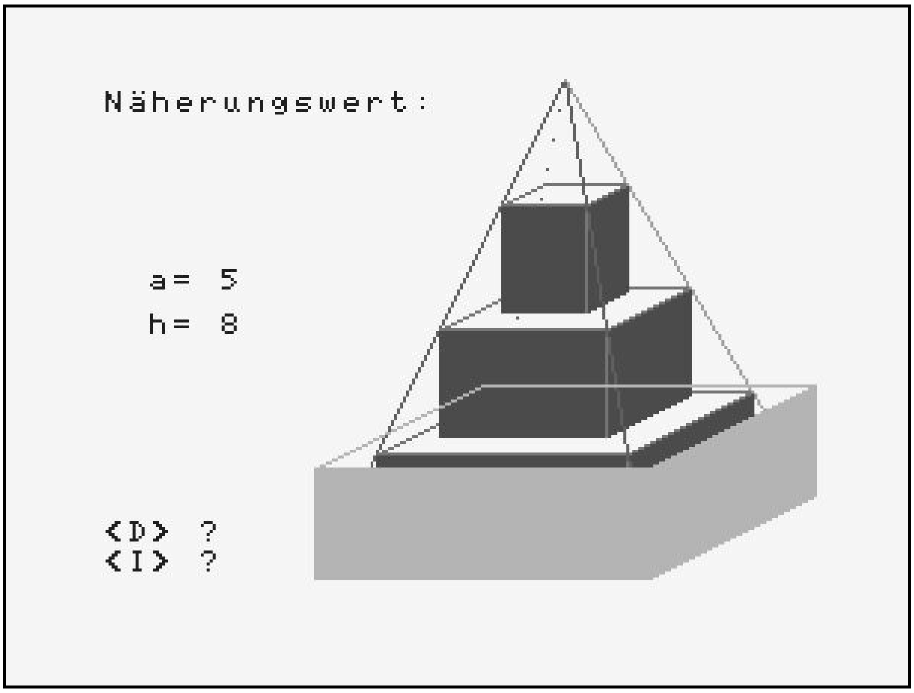
Was haben Treppenkörper mit Intervallschachtelung zu tun?

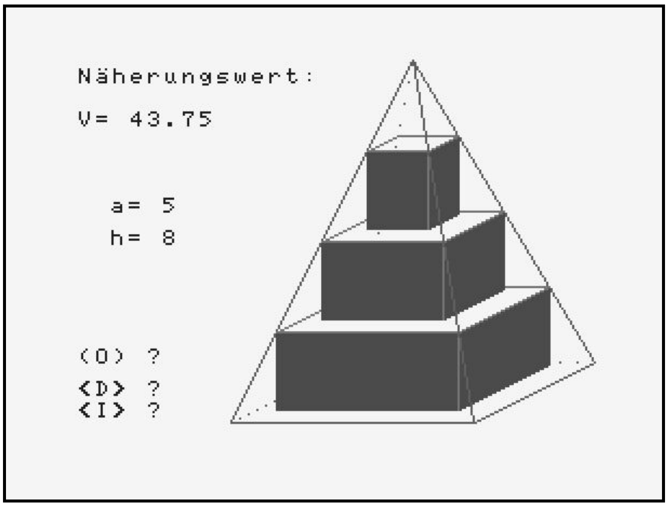
Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundkante a = 5 und der Höhe h = 8.

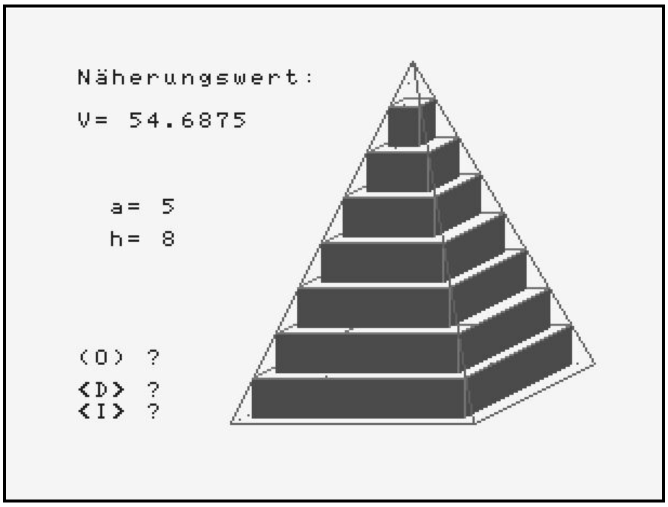
Die Höhe h ist äquidistant in 4 Teile eingeteilt und der Pyramide sind 3 Quader einbeschrieben.

1) Berechne die Volumina der 3 Quader und gib einen Näherungswert für die Untersumme U_4 an.

2) Das Computerprogramm hat begonnen, in die Graphik O_4 einzuzeichnen. Vervollständige die Graphik durch Einzeichnen der fehlenden Quader. - Was ist graphisch der Unterschied zwischen U_4 und O_4? - Berechne das Volumen des eingezeichneten, untersten Quaders von O_4 und gib einen Näherungswert für O_4 an.



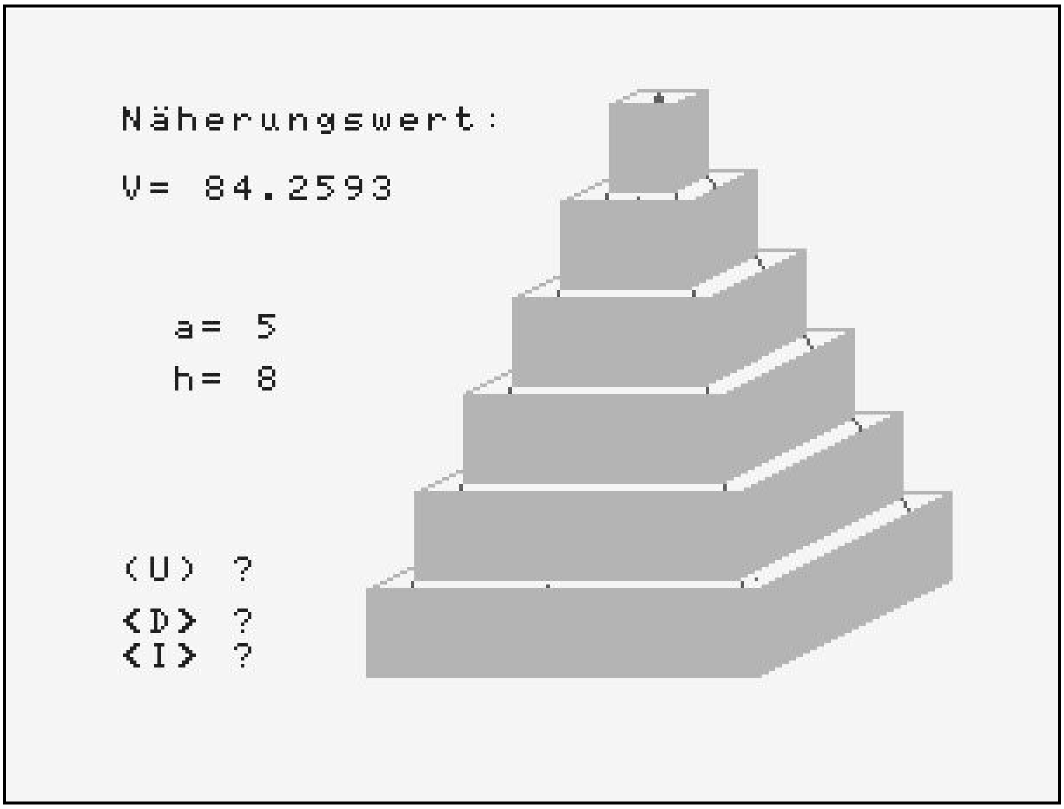




3) Das Computerprogramm hat links die Untersumme U_4 und rechts die Untersumme U_8 dargestellt. - Kennzeichne im linken Diagramm geeignet die Verbesserung der Approximation beim Übergang von U_4 zu U_8.

Pyramidenvolumen

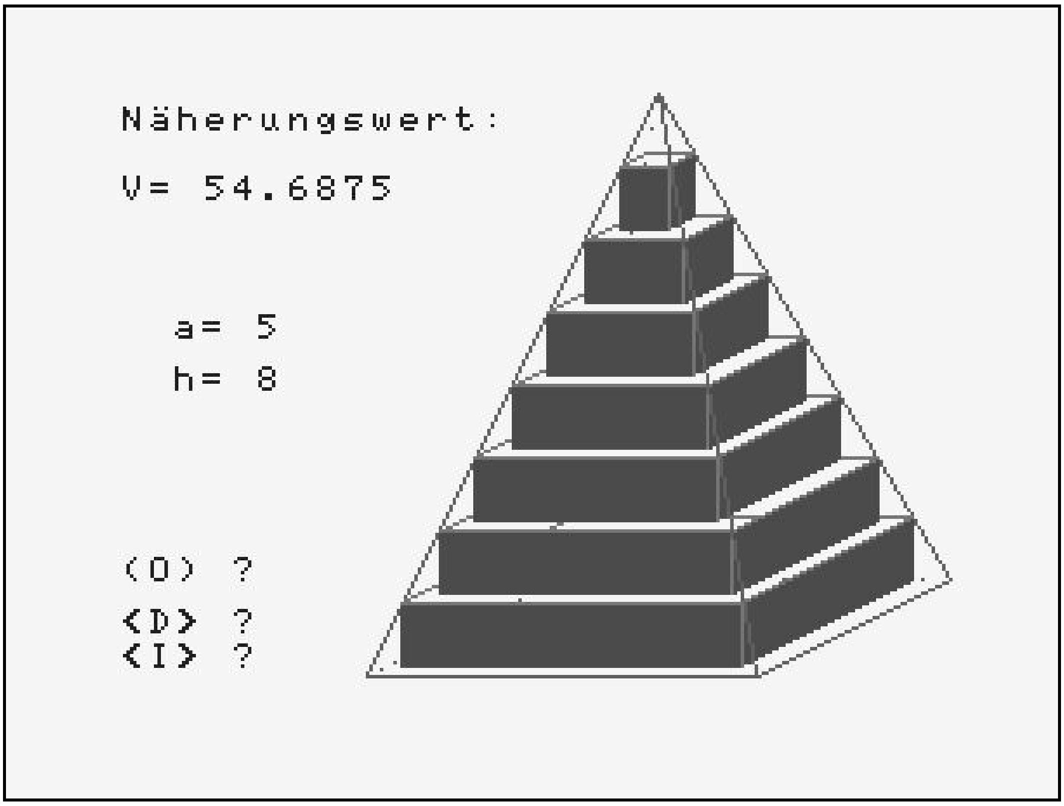
Was haben Treppenkörper mit Intervallschachtelung zu tun?



4) Schreibe rechts, neben die Quader, die zugehörigen Volumenmaßzahlen. Bestätige den angegebenen Näherungswert. - Wie groß ist U_6?

---

5) Schreibe rechts, neben die Quader, die zugehörigen Volumenmaßzahlen. Bestätige den angegebenen Näherungswert. - Wie groß ist O_8?



Pyramidenvolumen

Was haben Treppenkörper mit Intervallschachtelung zu tun?

Bei Verdoppelung der Quaderanzahl (wir wollen uns darauf beschränken) ist leicht einsehbar, dass gilt:

$$(1)\quad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \le U_{2n}\;;\qquad (2)\quad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \ge O_{2n}\;;\qquad (3)\quad O_n - U_n = a^2\cdot\frac{h}{n}\,,$$

wobei $O_n - U_n$ die Volumenmaßzahl des untersten Quaders darstellt (und trivialerweise gilt auch: $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \ge U_n$).

Da nun $O_n - U_n =: l_n$ mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden kann (maximaler Fehler bei der näherungsweisen Bestimmung des Pyramidenvolumens), liegt eine Intervallschachtelung vor, deren innere Zahl die Maßzahl des Volumens der Pyramide ist.

Pyramidennäherung; a= 5 ; h= 8

N	Untersumme	Obersumme
1	0.000000	200.000000
2	25.000000	125.000000
3	37.037037	103.703704
4	43.750000	93.750000
5	48.000000	88.000000
6	50.925926	84.259259
7	53.061224	81.632653
8	54.687500	79.687500
9	55.967078	78.189300
10	57.000000	77.000000
11	57.851240	76.033058
12	58.564815	75.231481
13	59.171598	74.556213
14	59.693878	73.979592
15	60.148148	73.481481
16	60.546875	73.046875
17	60.899654	72.664360
18	61.213992	72.325103

Druck → <D>;   Abbruch → <ESC>

Verallgemeinerung (Aufgaben):

6) Schreibe die Summen:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\cdot a\right)^2\cdot\frac{h}{n}\qquad \text{und}\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\cdot a\right)^2\cdot\frac{h}{n}$$

für konkretes n = 4, 6 und 8 mit ihren einzelnen Summanden auf. Setze für a = 5 und h = 8 und bestätige durch Vergleich mit den früheren Berechnungen, dass die linke Summe die Untersumme beschreibt, die rechte Summe die Obersumme.

7) Zeige durch algebraische Umformungen dass gilt:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\cdot a\right)^2\cdot\frac{h}{n} = \frac{a^2\cdot h}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \qquad\qquad O_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\cdot a\right)^2\cdot\frac{h}{n} = \frac{a^2\cdot h}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2$$

8) Informiere dich in deinen alten Heften (noch vorhanden?), geeigneter Literatur o.ä. über die Summenformel für die Quadratzahlen. - Bestätige dass gilt:

$$\frac{a^2\cdot h}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{a^2\cdot h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ n\ \cdot(2\cdot n-1)}{6} \qquad\qquad \frac{a^2\cdot h}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a^2\cdot h}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

Vertausche im Nenner 6 mit n^3 und begründe, dass dann der rechte Bruch sich mit wachsendem n immer mehr der 2 nähert!

Gib eine Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide an!

Pyramidenvolumen

Was haben Treppenkörper mit Intervallschachtelung zu tun?

<u>Eine historische Anmerkung (auf den Spuren von Euklid von Alexandria):</u>

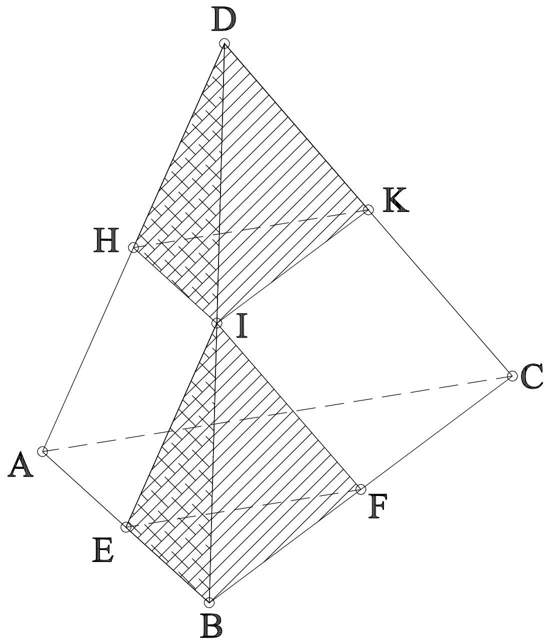
In den Elementen (Büchern) des Euklid findet man einen anderen gedanklichen Ansatz zur Bestimmung des Volumens einer Pyramide.

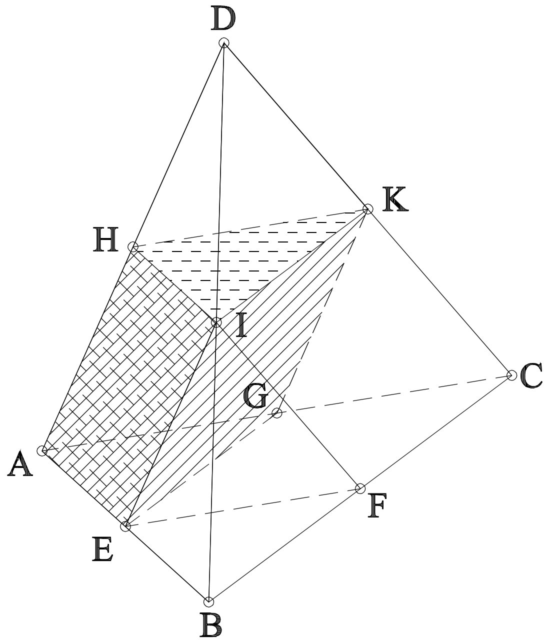
Die Punkte **E**, **F**, **G**, **H**, **I** und **K** seien die Mittelpunkte der 6 Seitenkanten einer dreieckigen Pyramide mit der Grundfläche $\boldsymbol{G}$ und der Höhe $\boldsymbol{h}$.

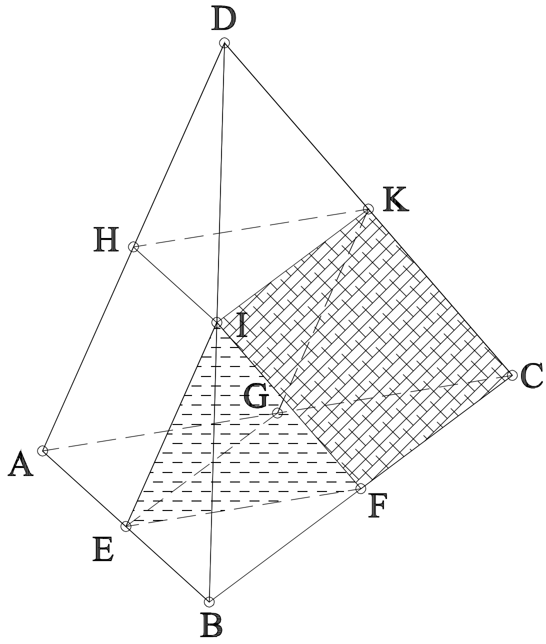
Schneidet man von der Pyramide die beiden schraffierten Pyramiden ab, die zur Ausgangspyramide ähnlich sind, so bleibt ein Restkörper übrig, der aus 2 dreieckigen Prismen besteht.

Für das Volumen des ersten Prismas gilt sicherlich:

$$\boxed{V_1 = \tfrac{1}{4}\cdot\boldsymbol{G} \cdot \tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{h}}$$







Beide Prismen müssen jedoch das gleiche Volumen besitzen, da man sich die Pyramide auch gedreht vorstellen kann, womit beide Prismen zusammen das Volumen: $V_{Pr} = \frac{1}{4}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h}$ besitzen.

Das Volumen der Pyramide ist damit: $V_P = \frac{1}{4}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h} + 2\cdot V_{Pk}$, wobei V_{Pk} das Volumen der 2 kleinen Pyramiden beschreibt.

Für das Volumen einer kleinen Pyramide gilt jedoch: $V_{Pk} = \frac{1}{8}\cdot V_P$ (Ähnlichkeit oder zentrische Streckung)

woraus sich mit der obigen Gleichung ergibt: $$\boxed{V_P = \tfrac{1}{4}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h} + \tfrac{1}{4}\cdot V_P \;\Rightarrow\; \tfrac{3}{4}\cdot V_P = \tfrac{1}{4}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h} \;\Rightarrow\; V_P = \tfrac{1}{3}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h}}$$

Pyramidenvolumen

Was haben Treppenkörper mit Intervallschachtelung zu tun?

<u>Eine Alternative (oder: Die spinnen, die Mathematiker):</u>

Nach der Erkenntnis, dass $V_P = \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{G \cdot h} + 2 \cdot V_{Pk}$ gilt, kann man natürlich V_{Pk} entsprechend dem vorherigen Vorgehen zerlegen, womit sich ergibt: $V_P = \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{G \cdot h} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{G \cdot h} + 2 \cdot V_{Pk} \right)$.

Das Verfahren gedanklich fortgesetzt führt zu: $V_P = \boldsymbol{G \cdot h} \cdot \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^n + ... \right)$

....

Multipliziert man den Ausdruck: $S_n := \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ mit $\frac{1}{4}$ und subtrahiert die 2 Zeilen voneinander so erhält man: $\frac{3}{4} \cdot S_n := \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \Leftrightarrow S_n := \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right)$.

Für immer größeres n erhält man für die Klammer damit im Grenzübergang: $\boxed{\frac{1}{3}}$!

Warum so kompliziert, wenn es auch einfacher geht? - Weil man bei manchen Verfahren Strategien lernen kann, die vielleicht noch einmal nützlich sein werden!