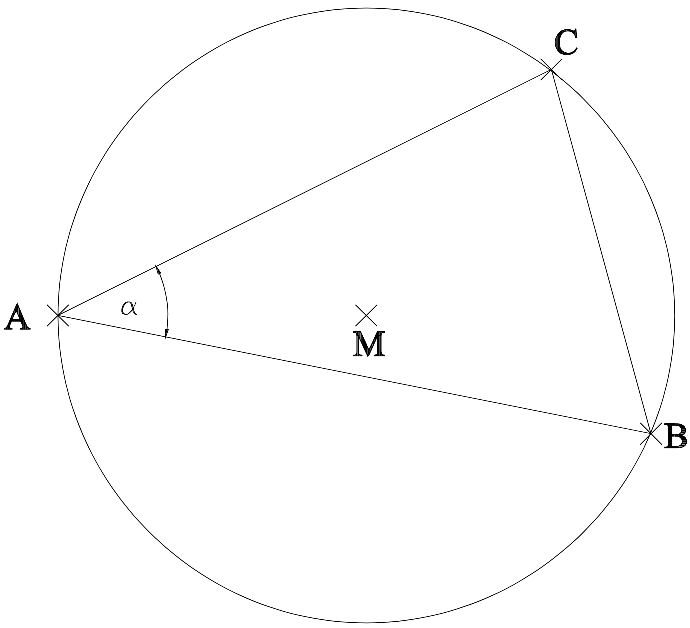
Kreis - Sehne - Sinus

Zeichne einen beliebigen Kreis, dessen Radius wir für das Folgende jedoch als gegeben ansehen werden, und einen Winkel α, dessen Scheitelpunkt A auf dem Kreis liegen soll.

Die beiden Schenkel des Winkels α schneiden den Kreis in den Punkten B und C.



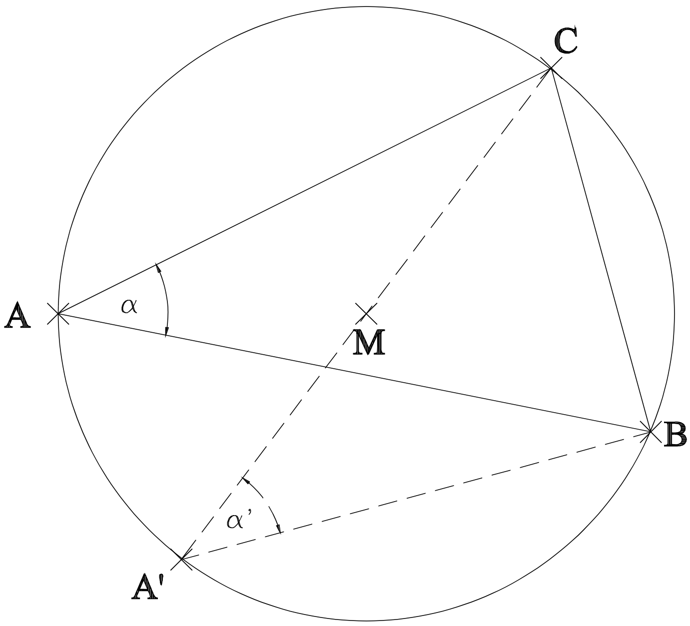
Aufgabe:

Bestimme die Länge der Sehne BC in Abhängigkeit vom Radius r des Kreises und der Größe des Winkels α.

Falls deine Versuche noch nicht zum Ziel geführt haben, probiere es mit folgender Hilfskonstruktion:

Zeichne einen Durchmesser durch C und nenne den Endpunkt des Durchmessers A'. Verbinde dann A' mit B und benenne ∢BA'C mit α'.

Analysiere nun die Gesamtfigur. - Kannst du nun die Aufgabe lösen?



Beweise:

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$$

$$\overline{\sphericalangle CBA'} = 90^\circ$$

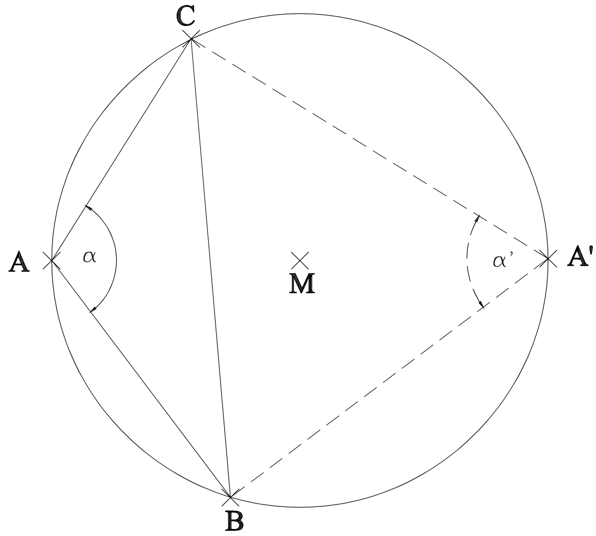
$$\overline{BC} = 2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

Womit die Aufgabe gelöst ist! - Die Länge einer Sehne am Kreis ist das Produkt des Durchmessers mit dem Sinus des zugehörigen Umfangswinkels!
Halt! - Moment einmal! - Gilt das auch, wenn der Winkel α stumpf ist? - Wie zeichnet man dann den Durchmesser; wie sieht dann die Hilfsfigur aus? - Zeichne eine entsprechende, neue Figur und versuche, den Beweis auch in diesem Fall zu führen!

Kreis - Sehne - Sinus

Falls deine Beweisversuche noch nicht zum Ziel geführt haben, versuche es mit folgender Hilfskonstruktion:

Wähle einen beliebigen Kreispunkt A’ auf der anderen Seite der Sehne als A. Verbinde A’ jeweils mit B und C und kennzeichne den Winkel ∢CA’B mit α’.



<u>Begründe:</u>

$$\overline{\alpha'} = 180° - \overline{\alpha}$$

$$\sin(\alpha') = \sin(\alpha)$$

$$\overline{BC} = 2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

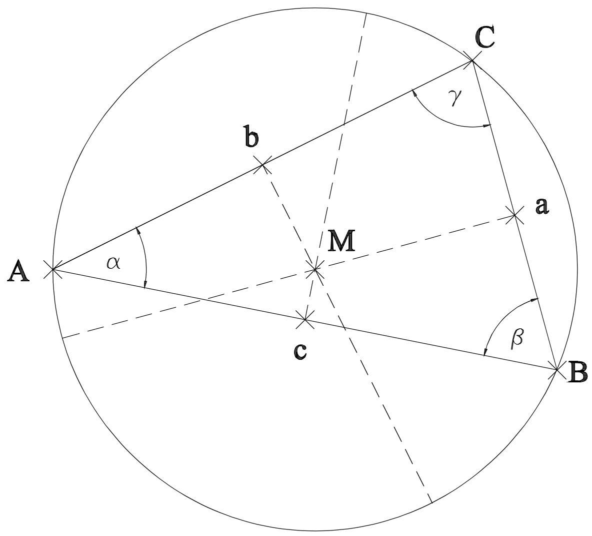
---

a) Zeichne ein beliebiges Dreieck und konstruiere den Umkreis dieses Dreieckes nur mit Zirkel und Lineal. Die 3 Seiten des Dreieckes sind damit natürlich Sehnen des Kreises.

Zeige, dass durch dreimalige Anwendung der zuvor hergeleiteten Beziehung,

z.B.: $\overline{BC} = 2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)$,

folgt: $$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

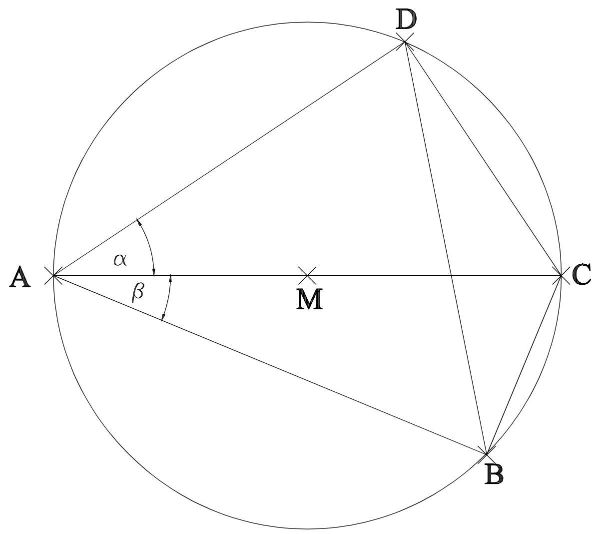


---

b) Zeichne in einen Kreis einen Durchmesser AC, der erster Schenkel eines Winkels α sein soll und zweiter Schenkel eines Winkels β. Gemeinsamer Scheitelpunkt für beide Winkel ist A und die Schnittpunkte der jeweiligen anderen Schenkel der Winkel mit dem Kreis ergänzen die Punkte A und C zu einem Sehnenviereck □ABCD.

Sehnenviereck? - Da gab es doch den Sehnenviereckssatz des Klaudios Ptolomaios:[1]

“In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der jeweils gegenüberliegenden Seiten.”



---

1 gelebt ca. 100 bis ca. 160 n. Chr. in Alexandria; Ähnlichkeitslehre in Klassenstufe 9: Im Sehnenviereck: $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$

Damit gilt: $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC}$

Teilt man diese Gleichung durch das Quadrat der Länge des Durchmessers AC, dann ...... ?!
Mit dem Satz des Thales sind rechte Winkel vorhanden, und mit dem Vorherigen, angewandt auf die Sehne BD ... ?!

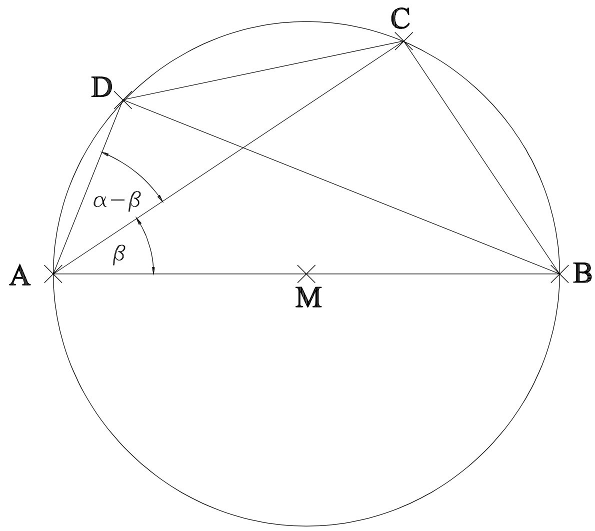
Zeige, dass aus dem Sehnensatz des Ptolomaios für die Sinusfunktion folgt:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

---

c) Hausaufgabe:

Zeige, dass wiederum durch Anwendung des Sehnenviereckssatzes des Ptolomaios und der zuvor entwickelten Beziehung zur Berechnung von Sehnenlängen mit der nebenstehenden Skizze das Additionstheorem für **sin(α - β)** folgt.



---

d) Leite über den "Pythagoras der Trigonometrie" aus den hergeleiteten Beziehungen für **sin(α + β)** und **sin(α - β)** die Additionstheoreme für **cos(α + β)** und **cos(α - β)** her.

e) Die Gaußschen (Mollweideschen) Formeln:

In jedem Dreieck ΔABC gilt: $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ und $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

<u>Begründe die einzelnen Beweisschritte:</u> (Unter Verwendung des Sinussatzes gilt)

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$