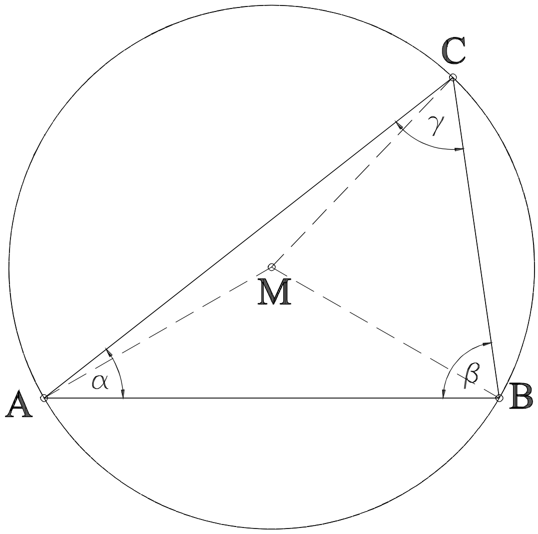
Trigonometrische Übung

oder: ... gelernte Sätze kann man auch anwenden!

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit den Maßen:

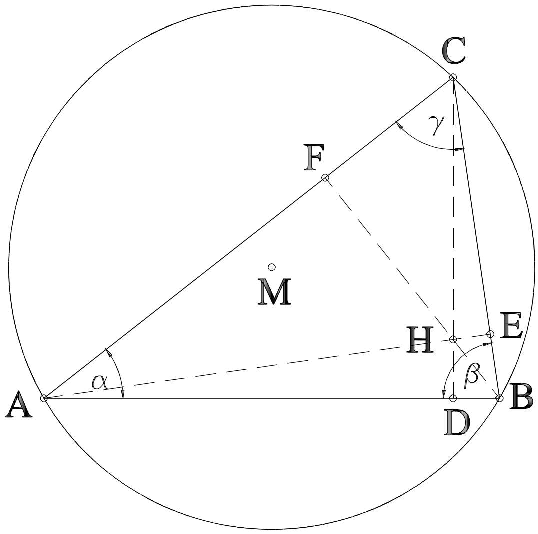
$\overline{AB} = 7\text{ cm}\ ;\ \ \overline{BC} = 5\text{ cm}\ ;\ \ \overline{AC} = 8\text{ cm}$



Aufgabe 1:[1]

Bestimme die 3 Winkelgrößen von α, β und γ sowie den Radius des Außenkreises. Überprüfe die Ergebnisse durch exemplarische Konstruktion. (Beachte: Umfangswinkelsatz)

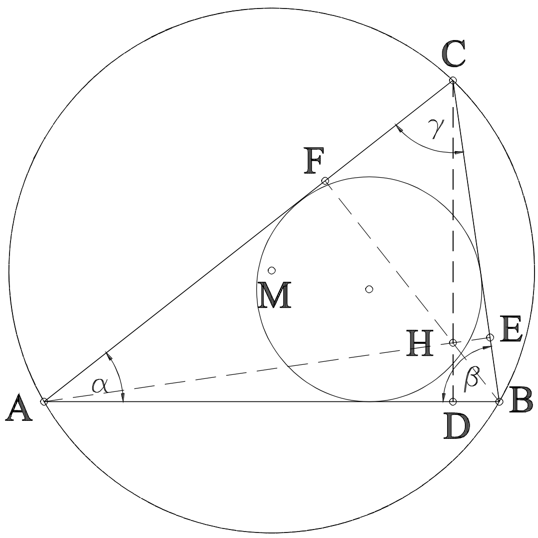
Aufgabe 2:



Bestimme die Maße der 3 Höhen des Dreiecks, die Länge der durch die Lotfußpunkte begrenzten Seitenabschnitte, sowie die Entfernung des Höhenschnittpunktes von den Lotfußpunkten. (Tipp: Ähnlichkeitssätze)

Überprüfe wiederum die Rechenergebnisse an der Konstruktion.

Aufgabe 3:



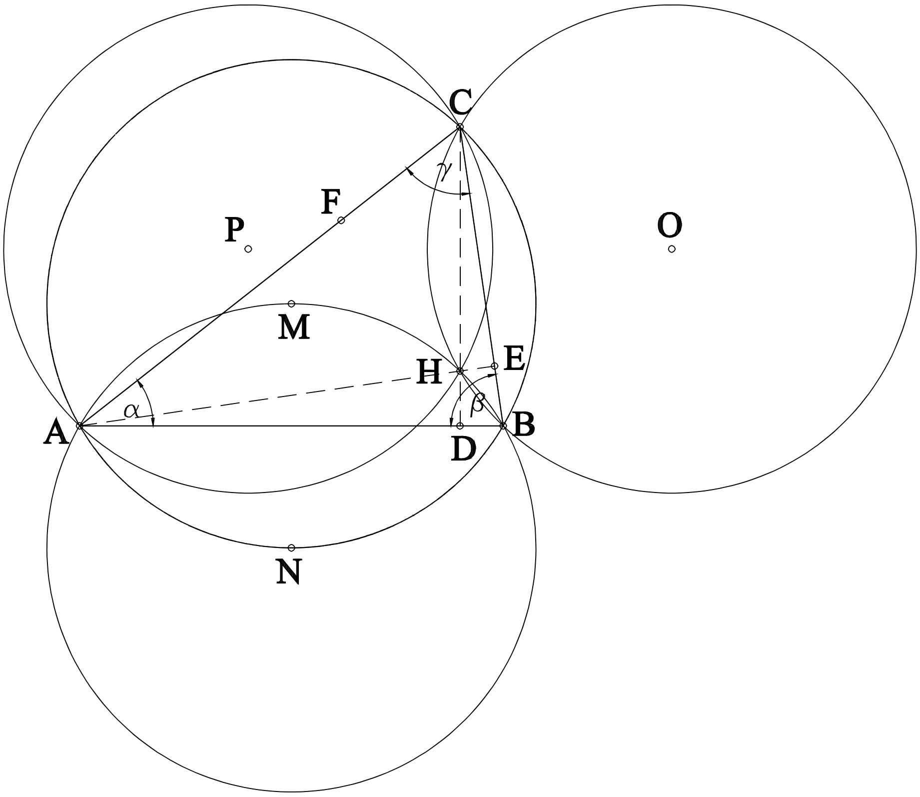
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC und bestimme des Radius r_i des Innenkreises des Dreiecks.

Bestimme über die Heronsche Dreiecksformel auch die Radien der 3 Ankreise des Dreiecks ΔABC.

[1] Erwartete Taschenrechnergenauigkeit für Rechenergebnisse: 2 Nachkommastellen.

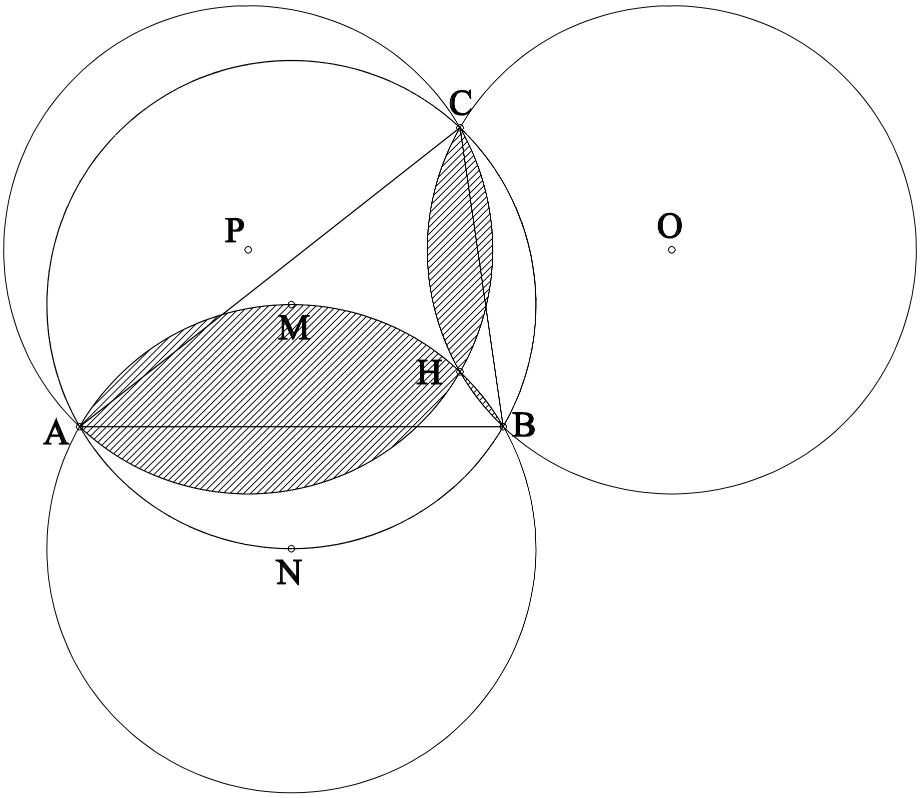
Trigonometrische Übung

oder: ... gelernte Sätze kann man auch anwenden!



Aufgabe 4:

Zeige: Zeichnet man Kreise durch den Höhenschnittpunkt H und jeweils 2 Eckpunkte des Dreiecks, so sind alle 3 Kreise kongruent zum Außenkreis.



Aufgabe 5:

Zeige: Die aus den 3 „Flundern“ bestehende Überlappungsfläche der 3 Kreise aus Aufgabe 4 ist so groß wie eine Kreisfläche vermindert um 2 Dreiecksflächen.

Quelle: Anschauliche Geometrie 4; Ehrenwirth Verlag 1989

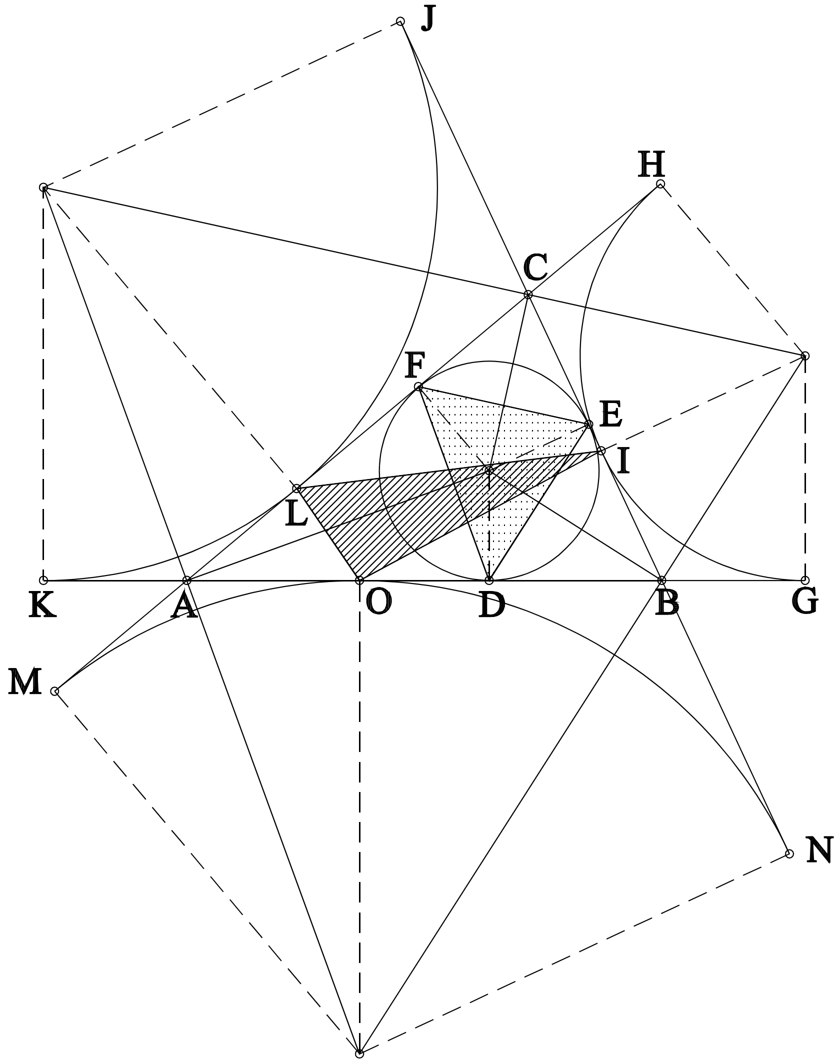
Einige Teilergebnisse zum Vergleich: $\alpha \approx 38{,}21°$, $\beta \approx 81{,}79°$, $\gamma = 60°$, $r \approx 4{,}0415$ cm.

Trigonometrische Übung

oder: ... gelernte Sätze kann man auch anwenden!

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit den Maßen:

$$c = \overline{AB} = 15\ \text{cm}$$
$$a = \overline{BC} = 10\ \text{cm}$$
$$b = \overline{AC} = 14\ \text{cm}$$



Aufgabe 6:

a) Bestimme die 3 Winkelgrößen von α, β und γ sowie die Größe des Winkels $\sphericalangle EDF$.
(Beachte: Umfangswinkelsatz)

b) Betrachtet wird das Dreieck ΔDEF, gebildet aus den Berührpunkten des Innenkreises des Dreiecks ΔABC.
Bestimme die Längen der Seiten DE und DF und bestätige, dass für den Flächeninhalt A_{DEF} gilt:
(Erinnerung: “Flächeninhalt und Umfangslänge”)

$$A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{DF} \cdot \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$A_{DEF}^2 = (s-b)^2 \cdot (1-\cos(\beta)) \cdot (s-a)^2 \cdot (1-\cos(\alpha)) \cdot \sin^2\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$$

c) Betrachtet wird das Dreieck ΔLOI, gebildet aus den Berührpunkten der drei Ankreise des Dreiecks ΔABC. - Bestimme die Längen der Seiten LO und OI und LI und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A_{LOI} (Tipp: Heronsche Dreiecksformel) .

Bestätige, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ΔDEF und ΔLOI gleich sind.[2]

Einige Teilergebnisse zum Vergleich:

$\alpha \approx 40{,}16°$, $\beta \approx 64{,}53°$, $\gamma \approx 73{,}31°$, $A_{DEF} \approx 15{,}1627\ \text{cm}^2$, $\overline{LO} \approx 3{,}56\ \text{cm}$, $\overline{OI} \approx 8{,}59\ \text{cm}$, $\overline{LI} \approx 9{,}70\ \text{cm}$, $\overline{DE} \approx 5{,}87\ \text{cm}$, $\overline{DF} \approx 6{,}51\ \text{cm}$.

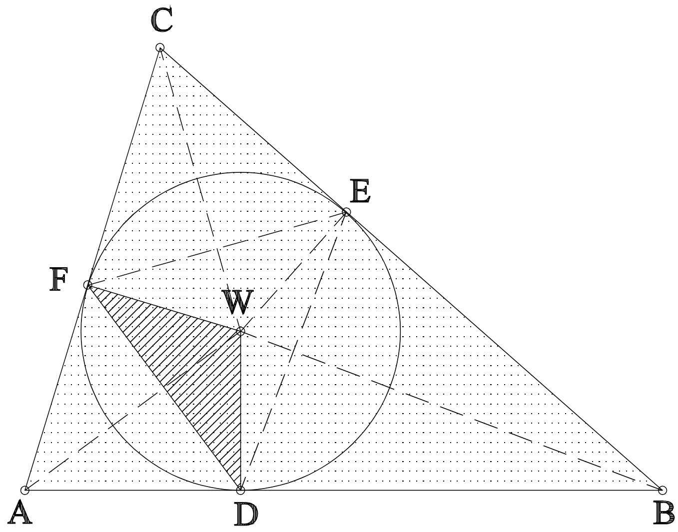
---

2 Quelle: (Für Aufgaben 6 und 7): http://www.gogeometry.com (Antonio Gutierrez)

Trigonometrische Übung

oder: ... gelernte Sätze kann man auch anwenden!

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC, sein Innenkreis mit Mittelpunkt W und Radiusgröße r_i, sowie die drei Berührpunkte D, E und F des Innenkreises mit den Dreiecksseiten.



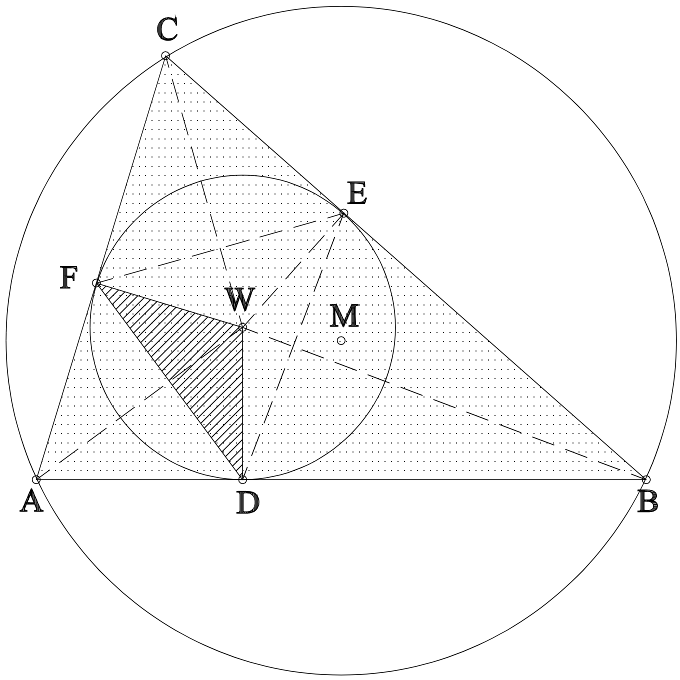
<u>Aufgabe 7:</u>

Zeige, dass die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ΔDWF und ΔABC im folgenden Verhältnis stehen:

$$\frac{\mathbf{A_{DWF}}}{\mathbf{A_{ABC}}} = \frac{r_i^2}{b \cdot c}$$

(<u>Hinweis:</u> Es gilt: $\sin(\alpha) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$)

<u>Zwei hübsche Folgerungen:</u>



Betrachtet man zusätzlich noch den zugehörigen Umkreis mit Mittelpunkt M und Radiusgröße r_u, so gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDWF:

$$\mathbf{A_{DWF}} = \frac{r_i^2 \cdot a}{4 \cdot r_u}$$

(<u>Erinnerung:</u> Arbeitsblatt “Ähnliche Dreiecke IV” - Klassenstufe 9)

sowie für die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ΔDEF und ΔABC das Verhältnis:

$$\frac{\mathbf{A_{DEF}}}{\mathbf{A_{ABC}}} = \frac{r_i}{2 \cdot r_u} \ .$$