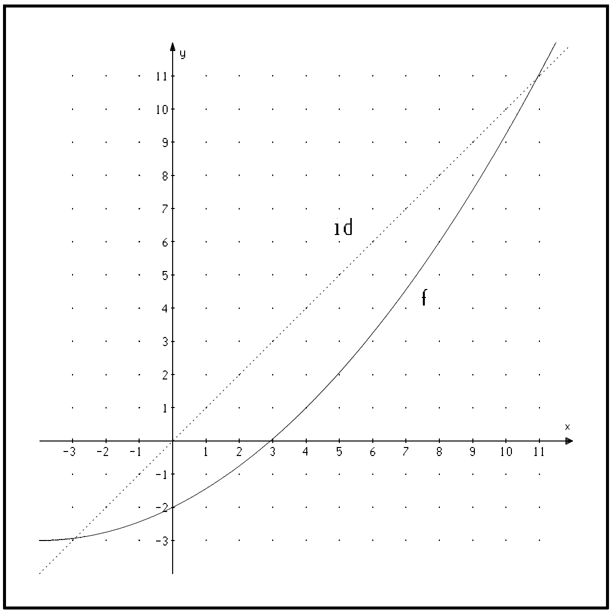
Umkehrfunktion
funktional - algebraisch - geometrisch

Gegeben ist die ganzrationale Funktion 2. Grades (Parabel):

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y \mid y = f(x) = \left(\frac{1}{4}\cdot x + 1\right)^2 - 3$$



Die Umkehrzuordnung $\mathbf{f}^*$ ($y \mapsto x$) ist keine Funktion, da allen reellen Zahlen der Zielmenge mit y < -3 nichts zugeordnet werden kann und für reelle Zahlen mit y > -3 ist die Zuordnung nicht eindeutig!

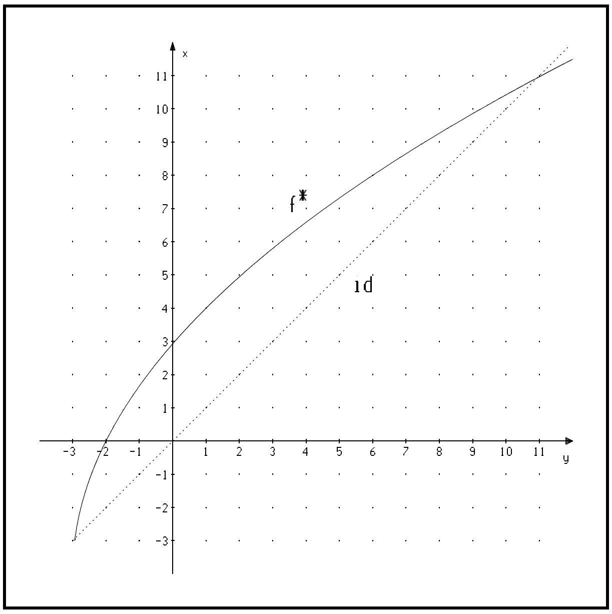
Man schränkt deshalb die Definitions- und Zielmenge ein, um die Eigenschaften, die eine Relation zu einer Funktion machen, zu erzwingen.

f ist rechtstotal (surjektiv), wenn die Zielmenge auf die Wertemenge eingeschränkt wird: $\mathbf{W_f} = \mathbb{R}^+ \cup [-3;0]$.

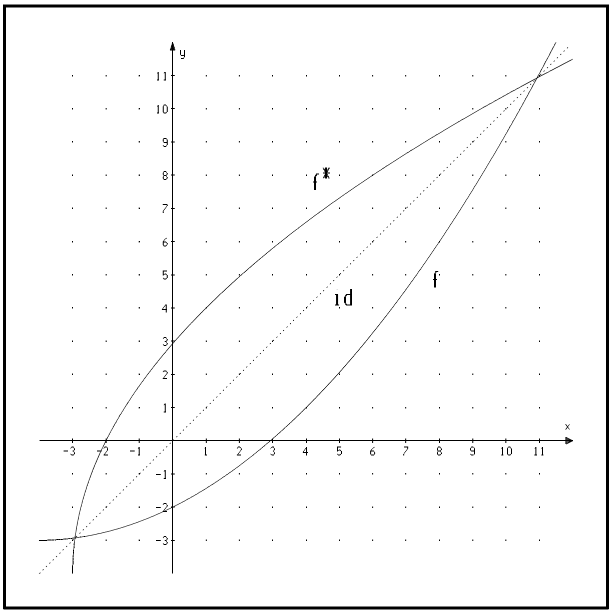
f ist linkseindeutig (injektiv) wenn die Definitionsmenge geeignet eingeschränkt wird: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}^+ \cup [-4;0]$.

<u>Es gilt dann:</u> $\mathbf{W_f} = \mathbf{D_{f^*}}$ und $\mathbf{D_f} = \mathbf{W_{f^*}}$, und die Umkehrzuordnung $\mathbf{f}^*$ ist eine Funktion.

$$\mathbf{f}^* : \mathbb{R}^+ \cup [-3;0] \to \mathbb{R}^+ \cup [-4;0]$$
$$y \mapsto x \mid y = \left(\frac{1}{4}\cdot x + 1\right)^2 - 3$$
$$y \mapsto x \mid x = 4\cdot\left(\sqrt{3+y} - 1\right)$$



Um nun beide Funktionen in **<u>ein</u>** Diagramm zeichnen zu können, benennt man im 2. Diagramm für $\mathbf{f}^*$ (und auch in der Zuordnungsvorschrift) die Variablen um und "legt beide Diagramme übereinander". - Das Ergebnis sieht dann genau so aus, als hätte man **f** an der Identität **id** gespiegelt.



(1) <u>Funktionaler Aspekt:</u>
Definitions- und Zielmenge so einschränken, dass eine eineindeutige (bijektive) Zuordnung entsteht.

(2) <u>Algebraischer Aspekt:</u>
Zuordnungsgleichung nach der anderen Variablen auflösen und Variablen umbenennen.

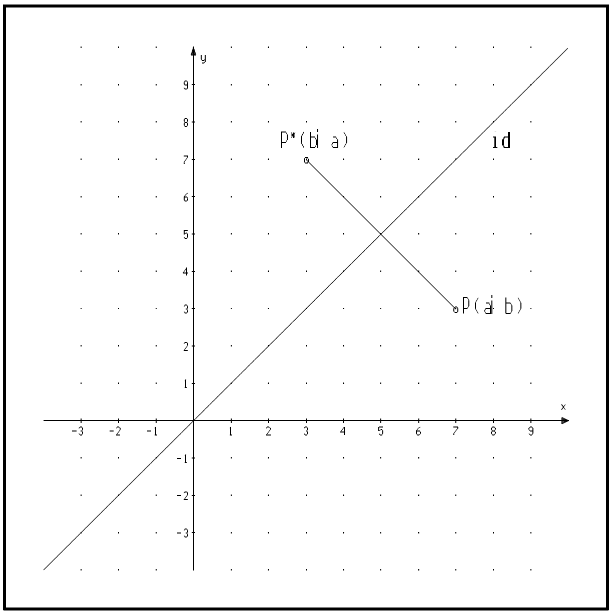
(3) <u>Geometrischer Aspekt:</u>
Graph von **f** an **id** spiegeln; Punktkoordinaten sind vertauscht.

Umkehrfunktion
funktional - algebraisch - geometrisch

Aufgaben:

(1) Beweise: Die Vertauschung von Punktkoordinaten bedeutet im kartesischen Koordinatensystem eine Spiegelung an der Identität!

Anleitung:
Notiere zunächst geeignet die Voraussetzungen und die Behauptung.
Ergänze die Skizze durch Einzeichnen der Strecken OP und OP^* und des Lotes von P auf die x-Achse und des Lotes von P^* auf die y-Achse.
Argumentiere geeignet mit Kongruenzsätzen für Dreiecke.



---

(2) Bestimme für die zuvor skizzierten Funktionen **f** und **f*** die Schnittpunktskoordinaten!

$$\mathbf{f}(x) = \left(\frac{1}{4}\cdot x + 1\right)^2 - 3$$
$$\mathbf{f}^*(x) = 4\cdot\left(\sqrt{3+x} - 1\right)$$
$$\mathbf{id}(x) = x$$

---

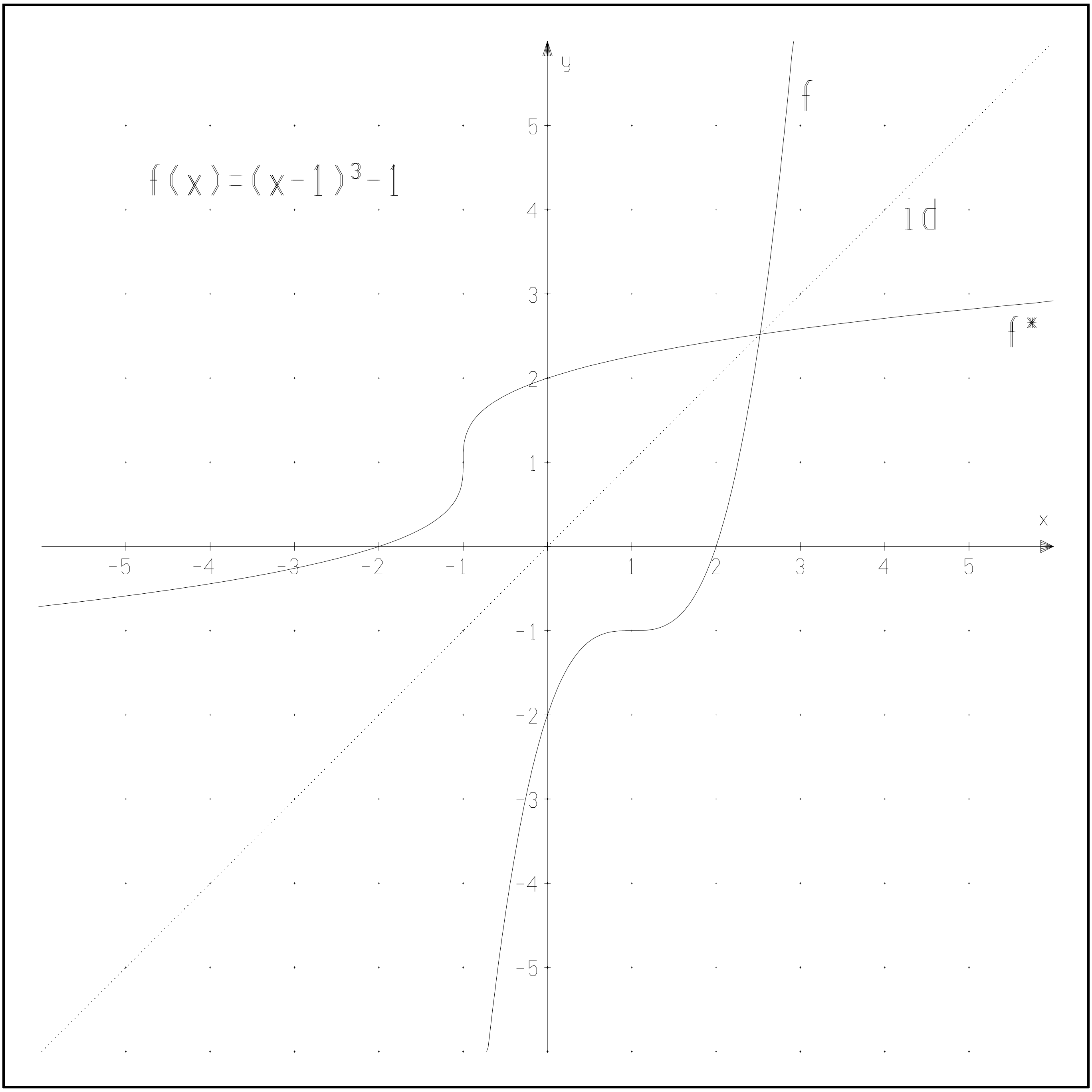
(3) Nachfolgend skizziert ist die Funktion **f** mit: **f**(x) = (x - 1)^3 - 1 , sowie die zugehörige Umkehrrelation **f***

a) Beweise:
f* ist Funktion mit $D_{f^*} = \mathbb{R}$. (Hinweis: Zeige, dass **f** an der Stelle 0 streng monoton wachsend ist.)

b) Gib einen Funktionsterm für **f*** an.

Umkehrfunktion

funktional - algebraisch - geometrisch



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y \;\Big|\; y = f(x) = (x-1)^3 - 1$$

– –

$$f^* : D_{f^*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y \;\Big|\; y = f^*(x) =$$