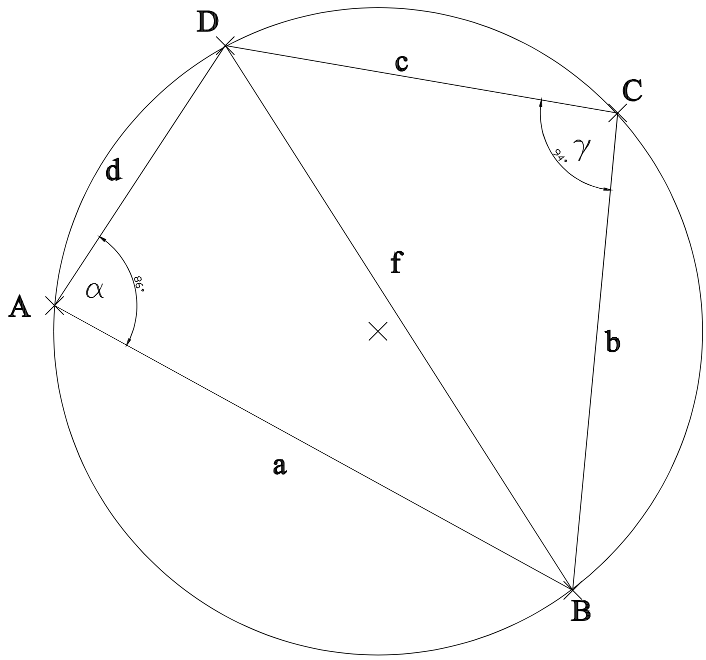
Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks

auf den Spuren des indischen Mathematikers Brahmagupta (598 - 660)

Den Flächeninhalt eines allgemeinen Vierecks bestimmt man meistens durch Zerlegung in 2 Dreiecke.

Geht es auch anders?

Für den Fall, dass das Viereck ein Sehnenviereck ist, hat der indische Mathematiker Brahmagupta einen Weg gefunden, der höchstwahrscheinlich schon Heron von Alexandria (oder sogar Archimedes von Syrakus) bekannt war. - Doch zunächst wollen wir erst einmal das anwenden, was wir können.



1. Zeichne in dein Heft ein beliebiges Sehnenviereck (möglichst groß, denn dann wirken sich die Fehler bei den gemessenen Näherungswerten nicht so aus) und bestimme den Flächeninhalt des Viereckes möglichst genau. Notiere auch Näherungswerte für alle 4 Seitenlängen.

a ≈ **b** ≈ **c** ≈ **d** ≈ $\mathbf{A}_\square$ ≈

Wenn wir erst einmal akzeptieren, dass es bei einem Sehnenviereck auch anders geht, dann ist zu fragen: Was ist denn das besondere bei einem Sehnenviereck?

2. Beweise: Bei einem Sehnenviereck ist die Summe der Winkelmaße zweier gegenüberliegender Winkel immer $180°$. (An diesen Beweis aus Klassenstufe 8 solltest du dich erinnern!)

Wenn das Besondere hier in einer Abhängigkeit von Winkelgrößen zu finden ist, dann "schreit das Ganze" eigentlich nach einer Argumentation mit trigonometrischen Funktionen, die man auch gut zur Berechnung von Streckenlängen verwenden kann.

3. Begründe:

a) $\mathbf{A}_\square = \frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(\gamma)$

b) $\mathbf{f^2} = a^2 + d^2 - 2\cdot a\cdot d\cdot\cos(\alpha)$
$\mathbf{f^2} = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\gamma)$

c) $\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)$; $\sin(\gamma) = \sin(\alpha)$

d) $4\cdot\mathbf{A}_\square = 2\cdot(a\cdot d + b\cdot c)\cdot\sin(\alpha)$

e) $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2\cdot(a\cdot d + b\cdot c)\cdot\cos(\alpha)$

f) $16\cdot\mathbf{A}_\square^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4\cdot(a\cdot d + b\cdot c)^2$

Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks

auf den Spuren des indischen Mathematikers Brahmagupta (598 - 660)

Verblüffend: Durch Quadratur der letzten beiden Gleichungen mit nachfolgender Addition, verschwanden über den “Pythagoras der Trigonometrie” die Winkel, womit sich eine Beziehung für den Flächeninhalt ergab, die nur von den 4 Seitenlängen abhängt! - Allerdings sieht die Gleichung noch etwas unübersichtlich aus. Ob es sich mit ein wenig Algebra vereinfachen läßt? - Doch zunächst einmal eine konkrete Rechnung.

4. Verwende die Gleichung 3.f) und berechne mit deinen gemessenen Seitenmaßen den Flächeninhalt des Vierecks (Taschenrechnergenauigkeit: 1 Nachkommastelle). - Stimmen die Ergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit überein?

....

Es soll nun versucht werden, die Gleichung durch mehrfache Anwendung binomischer Formeln algebraisch übersichtlicher zu gestalten.

5. Begründe Schritt für Schritt die nachfolgenden Umformungen:

$$16\cdot \mathbf{A}_{\square}^{\mathbf{2}} = (2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$

$$= \left[\,(2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c) + (a^2+d^2-b^2-c^2)\,\right]\cdot\left[\,(2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c) - (a^2+d^2-b^2-c^2)\,\right]$$

$$= \left[\,(a+d)^2 - (b-c)^2\,\right]\cdot\left[\,(b+c)^2 - (a-d)^2\,\right]$$

$$= \left[\,(a+d+b-c)\cdot(a+d-b+c)\,\right]\cdot\left[\,(b+c+a-d)\cdot(b+c-a+d)\,\right]$$

$$= (a+d+b-c)\cdot(a+d-b+c)\cdot(b+c+a-d)\cdot(b+c-a+d)$$

....

Da in der letzten Gleichung schon sehr viel Systematik zu erkennen ist bietet sich, unter Berücksichtigung der 16, die Einführung einer neuen Größe an:

$$\mathbf{s} := \frac{1}{2}\cdot\mathbf{U} = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c+d)$$

Damit gilt:

$$\mathbf{A}_{\square}^{\mathbf{2}} = \frac{1}{2}\cdot(a+d+b-c)\cdot\frac{1}{2}\cdot(a+d-b+c)\cdot\frac{1}{2}\cdot(b+c+a-d)\cdot\frac{1}{2}\cdot(b+c-a+d)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot(a+d+b+c)-c\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(a+d+b+c)-b\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(b+c+a+d)-d\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(b+c+a+d)-a\right]$$

$$= (s-c)\cdot(s-d)\cdot(s-b)\cdot(s-a)$$

....

$$\boxed{\mathbf{A}_{\square} = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}}$$

6. Erläutere, was sich ergibt, wenn das Viereck entartet zu einem Dreieck (z.B. D → C), das bekanntlich immer einen Umkreis besitzt. - Hatten wir das nicht schon einmal?!

Beweis im Nachtrag:

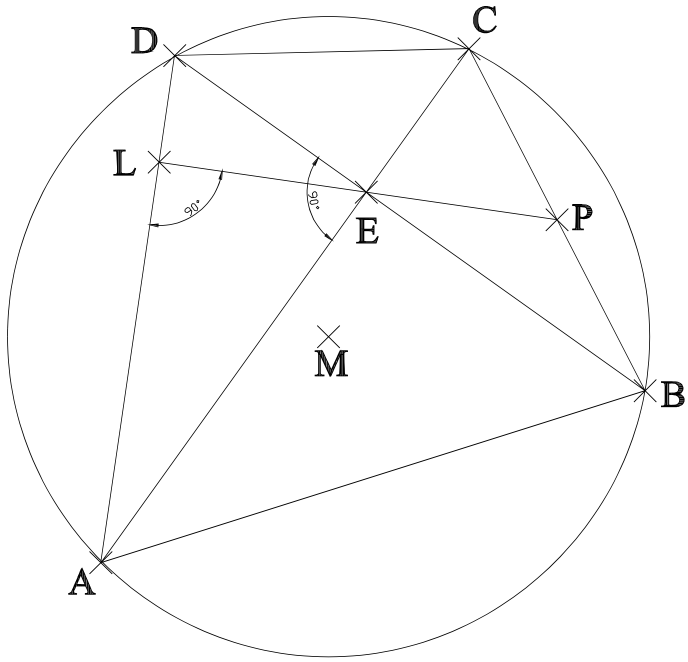
Für ein allgemeines Viereck gilt $\mathbf{A}_{\square} = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d) - a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\cos^2(\varepsilon)}$, wobei ε die halbe Winkelsumme zweier gegenüberliegender Winkel ist.

....

Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks

auf den Spuren des indischen Mathematikers Brahmagupta (598 - 660)

Brahmagupta hat auch den Sonderfall betrachtet, dass die Diagonalen eines Sehnenviereckes senkrecht aufeinander stehen (und wir wollen es ihm natürlich nachmachen).



7. Zeichne in dein Heft einen Kreis, wähle einen beliebigen Punkt E innerhalb des Kreises und konstruiere zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden durch E. Die Schnittpunkte der Geraden (Diagonalen) mit dem Kreis bilden ein (Sehnen-) Viereck.
   Zeichne nun eine weitere Gerade durch E, die senkrecht zu einer Vierecksseite (hier: AD) verläuft. Diese Gerade schneidet die gegenüberliegende Vierecksseite in einem Punkt P.

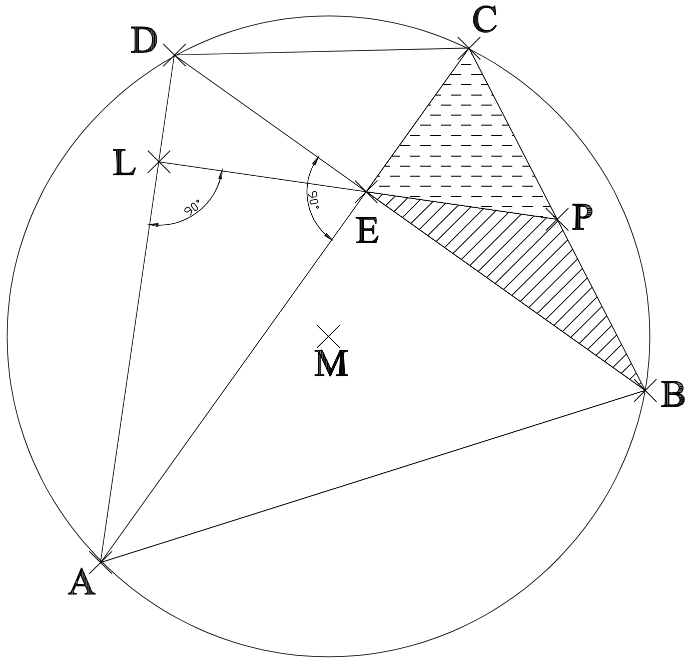
   Untersuche die Gesamtfigur auf Besonderheiten (wie Winkelgrößen, Streckenlängen, Lage von Punkten etc.). - Haben deine Nachbarn schon etwas entdeckt? - Überprüfe gegebenenfalls deine Entdeckung durch eine weitere Lotgerade auf eine andere Vierecksseite.

---

8. Beweise:

   a) Die Dreiecke: ΔCEP und ΔEBP sind gleichschenklig.

   b) $P = M_{BC}$



Ist das nicht eine hübsch einfache Art, in einem Sehnenviereck Seitenmittelpunkte zu konstruieren?

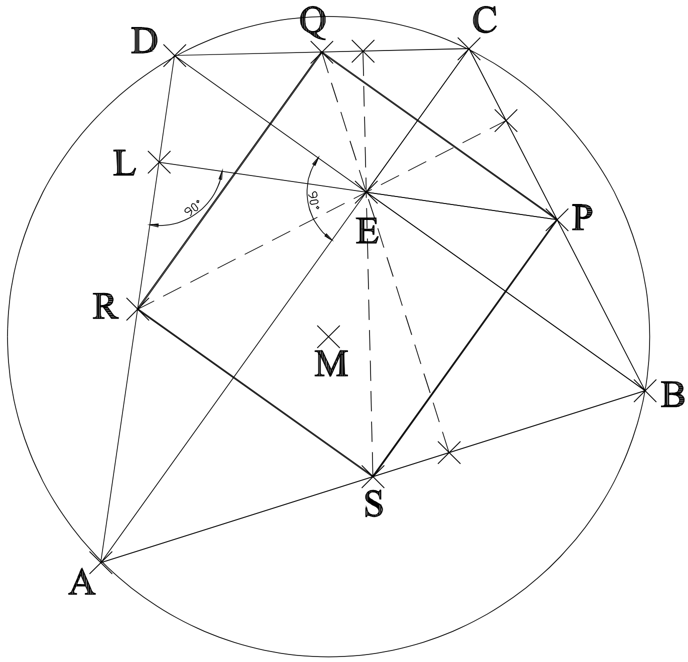
9. Konstruiere über Lotgeraden durch E die weiteren Seitenmittelpunkte des Sehnenviereckes und zeichne mit diesen vier Mittelpunkten ein einbeschriebenes Mittenviereck. - Was für ein Viereck entsteht wohl?

---

10. Beweise:[1]

    Das einbeschriebene Viereck, gebildet aus den Mittelpunkten der Sehnenvierecksseiten, ist ein Rechteck.

    Tipp: Erinnere dich an den Satz über die Mittelparallele im Dreieck (Die Diagonalen teilen das Sehnenviereck paarweise in jeweils 2 Dreiecke)



11. Begründe:

    Der Flächeninhalt dieses Sehnenviereckes ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des einbeschrieben Rechteckes.

Nachtrag zum Flächeninhalt eines allgemeinen Viereckes:

Bei einem allgemeinen Viereck entfällt natürlich die Eigenschaft eines Sehnenviereckes, dass die Summe der Winkelgrößen gegenüberliegender Winkel stets 180° ist. Damit setzt man nach den Beziehungen 3.a) und 3.b) von Seite 1 folgendermaßen fort:

a) $$2\cdot \mathbf{A}_\square = a\cdot d\cdot \sin(\alpha) + b\cdot c\cdot \sin(\gamma)$$

b) $$\mathbf{f^2} = a^2 + d^2 - 2\cdot a\cdot d\cdot \cos(\alpha)$$
$$\mathbf{f^2} = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\gamma)$$

c) $$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2\cdot a\cdot d\cdot \cos(\alpha) - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\gamma)$$

Die Quadratur der Gleichungen a) und c) ergibt:

d) $$16\cdot \mathbf{A}_\square^{\mathbf{2}} = 4\cdot a^2\cdot d^2\cdot \sin^2(\alpha) + 4\cdot b^2\cdot c^2\cdot \sin^2(\gamma) + 8\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \sin(\alpha)\cdot \sin(\gamma)$$

e) $$\left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2 = 4\cdot a^2\cdot d^2\cdot \cos^2(\alpha) + 4\cdot b^2\cdot c^2\cdot \cos^2(\gamma) - 8\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \cos(\alpha)\cdot \cos(\gamma)$$

Die Addition der Gleichungen d) und e) ergibt unter Beachtung des „Pythagoras der Trigonometrie“ und des Additionstheorems der Kosinusfunktion:

f) $$16\cdot \mathbf{A}_\square^{\mathbf{2}} + \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2 = 4\cdot a^2\cdot d^2 + 4\cdot b^2\cdot c^2 - 8\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \cos(\alpha + \gamma)$$

---

[1] Das Folgende ist ein Spezialfall des Satzes von **Varignon** (Pierre Varignon; 1654 - 1722)

Quelle: Coxeter/Greitzer: Zeitlose Geometrie; Klett Verlag 1983

Mit Hinzufügung der geeigneten quadratischen Ergänzung und Anwendung des Distributivgesetzes erhält man:

g) $$16\cdot \mathbf{A}_\square^2 + \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2 = (2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c)^2 - 8\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot [\ 1+\cos(\alpha+\gamma)]$$

Nun gilt, wiederum unter Beachtung des „Pythagoras der Trigonometrie“ und des Additionstheorems der Kosinusfunktion: $\cos(\varepsilon+\varepsilon) = \cos^2(\varepsilon) - \sin^2(\varepsilon) = 2\cdot\cos^2(\varepsilon) - 1$

Angewandt auf Gleichung g):

h) $$16\cdot \mathbf{A}_\square^2 + \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2 = (2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c)^2 - 8\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \left[\ 1+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right]$$

$$16\cdot \mathbf{A}_\square^2 + \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2 = (2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c)^2 - 8\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \left[\ 2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right]$$

$$16\cdot \mathbf{A}_\square^2 = (2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c)^2 - \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2 - 16\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

Die obige Gleichung entspricht bis auf den letzten Summanden der unter Punkt 5 erörterten Beziehung für ein Sehnenviereck und man erkennt leicht, dass für $\alpha+\gamma = 180^\circ$ der letzte Summand verschwindet.

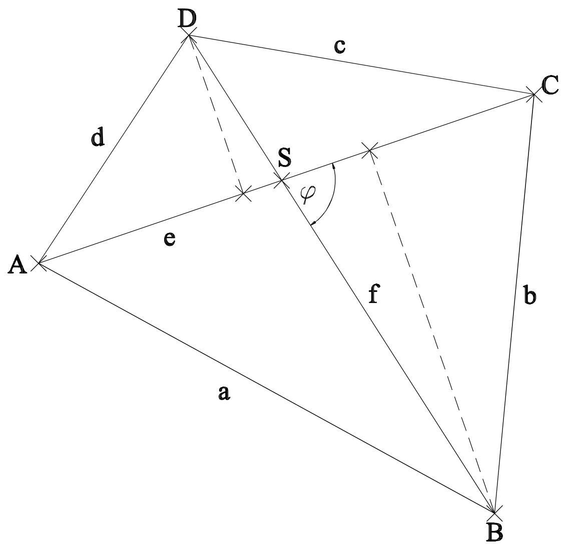
Unter äquivalenter Anwendung der unter Punkt 5 erörterten Umformungen und Vereinbarungen ergibt sich demnach für den Flächeninhalt eines <u>allgemeinen</u> Viereckes:[2]

$$\boxed{\mathbf{A}_\square^2 = (s-c)\cdot(s-d)\cdot(s-b)\cdot(s-a) - a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

Natürlich kann man den Flächeninhalt eines allgemeinen Viereckes einfacher bestimmen, insbesondere wenn die Längen der Diagonalen und die Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels bekannt sind.

12. Zeige über die Bestimmung der Flächeninhalte der durch die Diagonalen erzeugten 4 Teildreiecke, dass gilt:

$$\boxed{\mathbf{A}_\square = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot \sin(\varphi)}$$



13. Überprüfe die beiden obigen (eingerahmten) Vierecksbeziehungen an einem selbstgewählten Beispiel.

---

[2] <u>Beachte:</u> Da der Ausdruck $\mathbf{a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \cos^2}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$ niemals negativ werden kann ist das Sehnenviereck unter allen Vierecken mit den Seiten a, b, c, d das mit dem größten Flächeninhalt!

14. Brahmagupta hat auch die folgende Verhältnisgleichung für ein Sehnenviereck angegeben:

$$\boxed{\frac{e}{f} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d}}$$

Überprüfe diese Proportion an einem selbstgewählten Beispiel. - Begründe mit einem Gegenbeispiel, dass diese Beziehung für allgemeine Vierecke falsch ist.

Vierecksdiagonalen und Summen von Produkten von Sehnenvierecksseiten? - Das hatten wir doch so ähnlich schon früher!
Möglicherweise erinnerst du dich an diese Beziehung aus der Ähnlichkeitslehre der Klassenstufe 9. Dort findest du den Beweis in einem Arbeitsblatt mit Folgerungen aus dem Sehnenviereckssatz des Ptolomaios. - Was besagte dieser Satz denn noch einmal?