# Geometrische Objekte im 3-dimensionalen affinen Raum

**oder, ... wie nützlich ist ein zugehöriger Vektorraum der Verschiebungen**

Bekanntlich versteht man unter geometrischen Objekten Punktmengen, auf die man die üblichen Mengenoperationen wie z.B.: Schnittmenge bilden: $\cap$ - aussagenlogisch: $\wedge$ (und), Vereinigungsmenge bilden: $\cup$ - aussagenlogisch: $\vee$ (oder), etc. anwenden kann.

Definition: Ein Punkt ist ein geometrisches Objekt der Dimension Null (Aristoteles).

Über die Lage von geometrischen Objekten zueinander kann man im Sinne der euklidischen Geometrie i.a. auf der Grundlage von Konstruktionen nur qualitative Aussagen machen. Möchte man quantitative Ergebnisse erhalten, die normalerweise über das Messen in ebenen Figuren hinausgehen, so muss man neue Wege, auf den Spuren von René Descartes, beschreiten.

Wir ordnen dem dreidimensionalen affinen Raum ($A^3$) , unserem natürlichen geometrischen Raum, bestehend aus Punkten, den Vektorraum der Verschiebungen ($V^3$) , also geometrische Abbildungen zu. Der Vorteil: Mit geometrischen Abbildungen kann man rechnen (d.h. eigentlich, man kann sie hintereinander ausführen), womit wir zunächst den eindeutigen Zusammenhang der beiden Räume klären müssen.

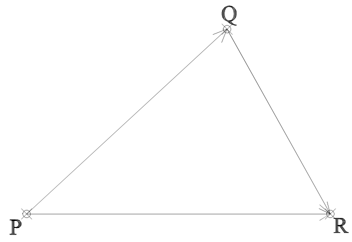
1. Axiom: (vom $A^3$ nach $V^3$) Zwei Punkten P, Q $\in A^3$ kann genau eine Verschiebung $\vec{v} \in V^3$ zugeordnet werden.[1]

$$(P;Q) \rightarrowtail \overrightarrow{PQ} =: \vec{v}$$

2. Axiom: (vom $V^3$ nach $A^3$) Einer Verschiebung $\vec{v} \in V^3$ und einem ausgezeichneten Punkt $\boldsymbol{O} \in A^3$ kann eindeutig ein Punkt P $\in A^3$ zugeordnet werden.[2]

$$\vec{v} \underset{\boldsymbol{O}}{\rightarrowtail} P \; ; \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{O}P} = \vec{v}$$

3. Axiom: (Rechenoperation) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$




..............................................................................................................................................

Wir ordnen also in Zukunft geometrischen Objekten gemäß Axiom 1 Vektoren zu, d.h. gehen vom affinen Raum in den zugehörigen Vektorraum. Dort im Vektorraum können wir rechnen (Addieren und Vektoren durch Multiplikation mit reellen Zahlen vervielfachen) und erhalten ein vektorielles Ergebnis, das wir wiederum gemäß Axiom 2 geometrisch interpretieren können.

---

[1] Eine Verschiebung wird eindeutig gekennzeichnet durch einen Pfeil, der eine **Richtung**, eine **Orientierung** (Pfeilspitze) und einen **Betrag** (Länge) besitzt. Eine Verschiebung (Vektor) besteht also aus einer **Klasse** von allen gleichgerichteten (parallelen), gleichorientierten und gleichlangen Pfeilen.
Beachte: Einen Vektor (Verschiebung) kann man nicht zeichnen, sondern nur einen Pfeil aus einem Vektor, d.h. die Verschiebung kann man durch einen Pfeil kennzeichnen.

[2] Da eine Verschiebung durch beliebig viele Pfeile gekennzeichnet werden kann, muss man ein für alle mal einen Bezugspunkt ***O*** festlegen (Anfangspunkt des Pfeils), damit die Pfeilspitze eindeutig einen weiteren Punkt kennzeichnet.

# Geometrische Objekte im 3-dimensionalen affinen Raum

**oder, ... wie nützlich ist ein zugehöriger Vektorraum der Verschiebungen**

Wir definieren nun ganz im Sinne von René Descartes ein affines Koordinatensystem, bestehend aus 4 Punkten, dem Ursprung $\boldsymbol{O}$ und 3 Einheitspunkten $\mathbf{E_x}$, $\mathbf{E_y}$ und $\mathbf{E_z}$, die den Einheitsmaßstab auf den jeweiligen Koordinatenachsen charakterisieren.

Jedem Punkt kann man nun bekanntlich die entsprechenden Koordinaten, d.h. zugehörige Abschnitte auf den Koordinatenachsen zuordnen. Beispiel: P ( 3 | -2 | 4 ).

Über Axiom 1 ordnen wir nun den Einheitspunkten, verknüpft mit dem Ursprung $\boldsymbol{O}$, zugehörige (Einheits-) Verschiebungen zu, nämlich:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathbf{E_x}} =: \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{x}, \ \overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathbf{E_y}} =: \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{y}, \ \overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathbf{E_z}} =: \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$$

Die Verschiebung $\overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathrm{P}} =: \vec{\mathrm{p}}$, die dem Punkt **P** zugeordnet ist, läßt sich nun im Vektorraum $V^3$ aus den Einheitsverschiebungen kombinieren, d.h. $\vec{\mathrm{p}} = 3\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{x} + (-2)\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{y} + 4\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$.

Jeder Vektor, d.h. jede Verschiebung, wird nun bei fest definierten Einheitsverschiebungen eindeutig gekennzeichnet durch die zugehörigen Komponenten, d.h. die zugehörigen Vervielfachungen der Einheitsverschiebungen.

Wir führen folgende neue Schreibweise ein: $\vec{\mathrm{p}} = 3\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{x} + (-2)\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{y} + 4\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{z} =: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Schreibweise P ( 3 | -2 | 4 ) stellt also einen Punkt im affinen Raum $A^3$ dar, während $\vec{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Verschiebung im zugehörigen Vektorraum $V^3$ ist, die, bezogen auf das definierte Einheitssystem von Verschiebungen, in Verbindung mit Axiom 2 den Punkt P eindeutig beschreibt.[3]

---

Durch 2 verschiedene Punkte P und Q existiert nach einem Axiom des Euklid genau eine Gerade g(P;Q). Alle Punkte X dieser Geraden kann man nun im zugehörigen Vektorraum durch eine vektorielle Gleichung beschreiben.

<u>Aufgabe 1:</u> Analysiere die Elemente der folgenden Gleichung graphisch. Fertige bezogen auf das Beispiel: P( -2 | 1 ) und Q( 4 | 4) eine zugehörige Darstellung im kartesischen Koordinatensystem an.

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathrm{X}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathrm{P}} + r\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \ ; \quad r \in \mathbb{R}}$$

Wähle mindestens 5 verschiedene reelle Zahlen r, z.B. $r \in \left\{ \frac{3}{2} \ ; \ -\frac{3}{5} \ ; \ \frac{3}{5} \ ; \ -\frac{4}{3} \ ; \ \frac{1}{2} \right\}$, und kennzeichne in der Graphik die zugehörigen Pfeile $\overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathrm{X}} =: \vec{\mathrm{x}}$.

Es gilt: $\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{p}} + r\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{P}\boldsymbol{O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}\mathrm{Q}}\right) = \vec{\mathrm{p}} + r\cdot(\vec{\mathrm{q}} - \vec{\mathrm{p}}) \ ; \quad r \in \mathbb{R}$

Gib jeweils eine konkrete Gleichung der Geraden g(P;Q) in Koordinatenform (y = m·x + n) und in vektorieller Form an.

---

[3] Zeilen- und Spaltenschreibweisen sind also sauber zu unterscheiden, weil sie verschiedene Objekte in unterschiedlichen Räumen beschreiben.

## Geometrische Objekte im 3-dimensionalen affinen Raum

**oder, ... wie nützlich ist ein zugehöriger Vektorraum der Verschiebungen**

Da in der vektoriellen Gleichung für die Gerade g(P;Q): $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{O}X} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}P} + r\cdot\overrightarrow{PQ}\ ;\quad r\in\mathbb{R}}$ die Verschiebung $\overrightarrow{\boldsymbol{O}P}$ einen Punkt der Geraden g beschreibt, wird diese Verschiebung auch Ortsvektor genannt; da die Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ die Richtung der Geraden g beschreibt, wird diese Verschiebung auch Richtungsvektor genannt.[4]

<u>Aufgabe 2:</u> Gib zu den angegeben Gleichungen für Geraden jeweils eine vektorielle Gleichung bzw. Koordinatengleichung an.

a) $y = -\frac{3}{2}\cdot x + 5$ $\qquad\qquad \vec{x} =$

$y =$ $\qquad\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\ ;\quad r \in \mathbb{R}$

b) $y = \frac{4}{5}\cdot x - 3$ $\qquad\qquad \vec{x} =$

$y =$ $\qquad\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\ ;\quad k \in \mathbb{R}$

Bestimme Gleichungen für die Geraden, die durch die folgenden 2 Punkte definiert sind und berechne den jeweiligen Abstand $\overline{PQ}$ der Punkte.

c) $P(-2\,|\,3)\ ;\quad Q(1\,|\,-1)$ $\qquad\qquad P(-3\,|\,1)\ ;\quad Q(-3\,|\,-1)$

$P(-2\,|\,3\,|\,-5)\ ;\quad Q(1\,|\,-1\,|\,4)$ $\qquad\qquad P(2\,|\,-3\,|\,-4)\ ;\quad Q(1\,|\,-3\,|\,7)$

Erläutere und begründe, wann keine Koordinatenform einer Geradengleichung existiert. Gib für vektorielle Beschreibungen einer bestimmten Geraden jeweils 2 wesentlich unterschiedliche Gleichungen an.

---

Gegeben sind zwei Geraden g und h im affinen Raum $A^3$, beschrieben durch die folgenden vektoriellen Gleichungen im Vektorraum $V^3$:

$$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\ ;\quad t\in\mathbb{R} \qquad\qquad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\ ;\quad r\in\mathbb{R}$$

<u>Aufgabe 3:</u> Bestimme die Koordinaten der jeweiligen Durchstoßpunkte $D_{xy}$, $D_{yz}$ und $D_{xz}$ der beiden Geraden durch die Koordinatenebenen.
Begründe, dass die beiden Geraden weder parallel sind, noch dass die Gleichungen dieselbe Gerade beschreiben.

---

[4] <u>Beachte:</u> Ein Richtungsvektor legt die Richtung einer Geraden fest, unabhängig von seiner Orientierung und seinem Betrag. Die Namen: Ortsvektor und Richtungsvektor rechtfertigen sich nur über die geometrische Interpretation durch die Zuordnung vom $V^3$ zum $A^3$. Als Elemente des Vektorraumes $V^3$ gibt es <u>keine</u> Unterschiede dieser Verschiebungen, sie können beliebig linear kombiniert werden, d.h. mit reellen Zahlen vervielfacht und addiert werden.

## Geometrische Objekte im 3-dimensionalen affinen Raum

**oder, ... wie nützlich ist ein zugehöriger Vektorraum der Verschiebungen**

Zur weiteren Untersuchung der Lage der Geraden zueinander im Raum bestimmen wir die Schnittmenge $g \cap h$ durch Gleichsetzen der vektoriellen Terme:

$$\begin{pmatrix} 9+t\cdot 3 \\ 3+t\cdot 1 \\ 8+t\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+r\cdot 2 \\ 6+r\cdot 3 \\ 5+r\cdot 2 \end{pmatrix} \qquad r, t \in \mathbb{R}$$

Da vektorielle Verschiebungen sicher genau dann gleich sind, wenn sie in ihren Komponenten bezüglich der Einheitsverschiebungen übereinstimmen ergibt sich folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} & 9+t\cdot 3 & = & 4+r\cdot 2 \\ \wedge & 3+t\cdot 1 & = & 6+r\cdot 3 \\ \wedge & 8+t\cdot 5 & = & 5+r\cdot 2 \end{array} \right\} \qquad r, t \in \mathbb{R}$$

Dieses ist ein überbestimmtes LGS in 2 Variablen, den Parametern r und t. - Wir reduzieren dieses LGS auf 2 Gleichungen in 2 Variablen, d.h. geometrisch, wir projizieren die beiden Geraden in eine Koordinatenebene, z.B. die x-y-Ebene. Die Projektionsgeraden $g_{xy}$ und $h_{xy}$ besitzen sicher einen Schnittpunkt, da die Geraden g und h im Raum ja nicht parallel waren.

Bestätige über die Lösung von $\left\{ \begin{array}{lrcl} & 9+t\cdot 3 & = & 4+r\cdot 2 \\ \wedge & 3+t\cdot 1 & = & 6+r\cdot 3 \end{array} \right\}$, dass $g_{xy} \cap h_{xy} = \{ (0 \mid 0) \}$ ist.

Der Schnittpunkt in der Projektion kann jedoch von 2 Punkten unterschiedlicher „Höhe" über der x-y-Ebene herrühren, weswegen nun die z-Komponente überprüft werden muss.

Da $\qquad 8 + (-3) \cdot 5 = 5 + (-2) \cdot 2 \qquad$ unwahr ist,

verlaufen die Geraden g und h windschief im Raum $A^3$.

<u>Aufgabe 4:</u> Untersuche die gegenseitige Lage der durch die Gleichungen definierten Geraden im Raum.

a) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ;\ t\in\mathbb{R} \qquad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} ;\ r\in\mathbb{R}$

b) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ -1 \end{pmatrix} ;\ t\in\mathbb{R} \qquad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} ;\ r\in\mathbb{R}$

c) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix} ;\ t\in\mathbb{R} \qquad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} ;\ r\in\mathbb{R}$

d) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} ;\ t\in\mathbb{R} \qquad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} ;\ r\in\mathbb{R}$

# Geometrische Objekte im 3-dimensionalen affinen Raum

**oder, ... wie nützlich ist ein zugehöriger Vektorraum der Verschiebungen**

HA (Übung): Untersuche die gegenseitige Lage der durch die Gleichungen definierten Geraden im Raum.

a) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;;\; r \in \mathbb{R}$

b) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \;;\; r \in \mathbb{R}$

c) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \;;\; r \in \mathbb{R}$

d) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \;;\; r \in \mathbb{R}$

Untersuche die gegenseitige Lage der durch die 3 Gleichungen definierten Geraden im Raum relativ zueinander. ( t, r, k ∈ ℝ )

e) $\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{j} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

Natürlich sollte man bei allem Neuen bekannte Strategien von früher nicht vergessen. Dazu im folgenden 2 weitere Beispiele.

Die durch die Gleichungen definierten beiden Geraden g und h besitzen im Raum trivialerweise einen Schnittpunkt.

$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \;;\; r \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: Bestimme vektorielle Gleichungen für die beiden Winkelhalbierenden der sich schneidenden Geraden g und h.
Tipp: Erinnere dich an die Viereckslehre der Klasse 8. Verwende, dass eine Raute ein spezielles Parallelogramm ist.

Aufgabe 6: Der Punkt P( 5 | 4 | 3 ) liegt nicht auf der Geraden g. Bestimme den Abstand d des Punktes P von der Geraden g.
Tipp: ( 1+2·t | -3+t | 3-2·t ) ist für jedes t∈ℝ ein Punkt $Q_t$ der Geraden g. Bestimme das Quadrat des Abstandes von P und $Q_t$ und fasse dieses Abstandsquadrat funktional auf. Bestimme das Minimum dieser Funktion.