Zwei historische Reminiszenzen

Die exakte Lösung einer kubischen Gleichung - Auf den Spuren von Albert Einstein

Girolamo **Cardano**, geboren am 24.09.1501 in Pavia, gestorben am 21.09.1576 in Rom, war Arzt und Mathematiker und hat folgende Lösung für die kubische Gleichung:

$$x^3 - 3 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b = 0$$

angegeben: $$x = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}} \,.$$

Cardano verwendete dabei vorherige Erkenntnisse von Scipione del Ferro und Nicolo Tartaglia[1], und auf ihn geht auch die Einführung von "vorgestellten", d. h. imaginären Zahlen zurück. - Berühmt ist in diesem Zusammenhang die von ihm formulierte Aufgabe:

"Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, dass das Produkt der beiden Summanden 40 ergibt."

Man überprüft leicht, dass die Lösung der quadratischen Gleichung: $x \cdot (10 - x) = 40$ nur in $\mathbb{C}$ zu finden ist, weil $\sqrt{-15} \notin \mathbb{R}$. - Jedoch zurück zur allgemeinen Lösung einer kubischen Gleichung!

---

1) (Transformation) $$x^3 + p \cdot x^2 + q \cdot x + r = 0$$

Zeige, dass sich die obige, allgemeine kubische Gleichung, durch die Substitution: $x := z - \frac{p}{3}$ in eine kubische Gleichung ohne quadratisches Glied überführen läßt.

Führe diese Transformation zunächst beispielhaft an der Gleichung: $x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 32 = 0$ durch. - Bestätige das Ergebnis: $z^3 - 16 \cdot z - 8 = 0$.

Anmerkung: Fehlt das lineare Glied, d.h. $q = 0$, so führt auch die Transformation $x := \frac{1}{z}$ zum Verschwinden des quadratischen Gliedes.

---

2) (Substitution) $$x^3 - 3 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b = 0$$

Der obigen Normalform einer kubischen Gleichung wollen wir nun mit der Substitution: $x := u + v$ 'zu Leibe rücken'. - Zeige, dass dies zu der folgenden, äquivalenten Gleichung führt:

$$\left(u^3 + v^3 - 2 \cdot b \right) + (u + v) \cdot (3 \cdot u \cdot v - 3 \cdot a) = 0$$

Da $(u + v) \neq 0$ sein muss $(b \neq 0)$, ist diese Gleichung lösbar unter den Bedingungen:

$$(u^3 + v^3 = 2 \cdot b) \wedge (u \cdot v = a)$$

---

3) (Die 'zündende' Idee) Der Satz von Viëta!

Schreibt man die zweite Bedingung: $(u \cdot v = a)$ in Form 3. Potenzen: $(u^3 \cdot v^3 = a^3)$, so sieht man, dass u^3 und v^3 Lösungen einer quadratischen Gleichung sein müssen: $z^2 - 2 \cdot b \cdot z + a^3 = 0$, für die wir eine Lösungsformel kennen.

---

[1] Scipione del Ferro (1496 - 1526; Professor in Bologna) und Nicolo Tartaglia (✳ 1499/1500 in Brescia, † 17.12.1557 in Venedig; Rechenmeister in Brescia und Verona, später Professor für Mathematik in Venedig)

$$u^3 = b + \sqrt{b^2 - a^3} \quad \wedge \quad v^3 = b - \sqrt{b^2 - a^3}$$

---

4) (Die Praxis) $x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 32 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^3 - 16 \cdot z - 8 = 0$

Bestätige, dass "die Lösung für z" lautet: $z = \sqrt[3]{4 + \sqrt{16 - \frac{4096}{27}}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{16 - \frac{4096}{27}}}$.

Wie leicht zu sehen ist, müssen wir hier unsere Kenntnisse der komplexen Zahlen verwenden, weil die Diskriminante der Quadratwurzel negativ ist. Wir müssen also (sowohl für u als auch für v) die dritte Wurzel aus einer komplexen Zahl ziehen (Polarkoordinaten!), d.h. wir erhalten 3 Lösungen u_1, u_2 und u_3 für den ersten Summanden von z und 3 Lösungen v_1, v_2 und v_3 für den zweiten Summanden von z.

Welche der (komplexen) Lösungen für u und v linear zu kombinieren sind (es kann ja nur maximal 3 Lösungen für x geben) ergibt sich aus der Bedingung: $u \cdot v = a$, d.h. hier konkret: $u \cdot v = \frac{16}{3}$.

Bestätige, dass die Lösungen lauten:

$$\begin{aligned} u_1 &\approx +2{,}11 + 0{,}93 \cdot i & \qquad v_1 &\approx -0{,}25 + 2{,}30 \cdot i \\ u_2 &\approx -1{,}86 + 1{,}37 \cdot i & v_2 &\approx -1{,}86 - 1{,}37 \cdot i \\ u_3 &\approx -0{,}25 - 2{,}30 \cdot i & v_3 &\approx +2{,}11 - 0{,}93 \cdot i \end{aligned}$$

und dass damit die 3 reellen Lösungen sind: $z_1 \approx 4{,}22$, $z_2 \approx -3{,}72$, $z_3 \approx -0{,}50$.

Nun muss natürlich noch zurück transformiert werden: $x_1 \approx 2{,}22$, $x_2 \approx -5{,}72$, $x_3 \approx -2{,}50$.

Es ist schon erstaunlich, mit welch trickreichen Rechenmethoden die Meister des 16. Jahrhunderts Gleichungen zu lösen verstanden. Durch die heutigen Möglichkeiten numerischer Approximationsverfahren hat die Cardanosche Formel natürlich ihre praktische Bedeutung verloren, doch es war sicher lohnend und lehrreich den Lösungsgedanken zu verfolgen.

n	x_n	x_{n+1}
1	-6,000000	-5,750000
2	-5,750000	-5,721957
3	-5,721957	-5,721612
4	-5,721612	-5,721612

n	x_n	x_{n+1}
1	-2,000000	-2,500000
2	-2,500000	-2,508197
3	-2,508197	-2,508203
4	-2,508203	-2,508203

n	x_n	x_{n+1}
1	2,000000	2,250000
2	2,250000	2,229951
3	2,229951	2,229815
4	2,229815	2,229815

Die obigen Berechnungen sind, bei geeigneten Anfangswerten, mit dem Newton-Verfahren erstellt worden.

---

5) (Die Feinanalyse)

Suche für die beiden anderen, wesentlich verschiedenen Fälle der Lösungsmenge einer kubischen Gleichung geeignete Beispiele (genau 1 reelle Lösung; genau 2 reelle Lösungen). Analysiere die Auswirkungen auf die Cardanosche Lösungsstrategie in diesen Fällen. Wo sind die entscheidenden rechentechnischen Unterschiede?

Zwei historische Reminiszenzen

Die exakte Lösung einer kubischen Gleichung - Auf den Spuren von Albert Einstein

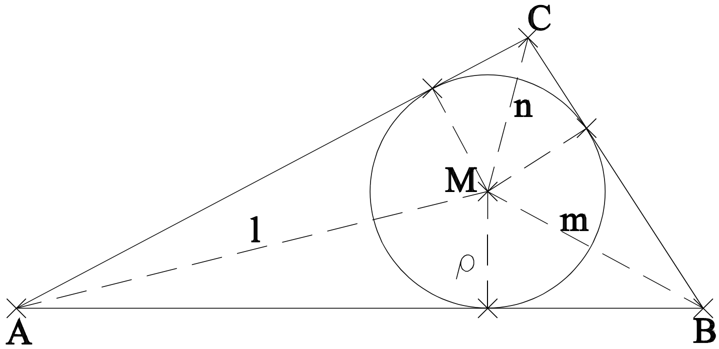
Nachfolgend sind zwei Seiten aus der Matura- (Abitur-) Arbeit von Albert Einstein[2] aufgeführt, die er im Frühjahr 1896 an der Alten Kantonsschule Aarau (Schweiz) abgelegt hat.[3]

Beim Studium der Bearbeitung der Aufgabe (die eigentlich Aufgabe 3 - nicht 1 - seiner Arbeit darstellt) sind natürlich mehrere Voraussetzungen zu beachten: Albert Einstein schrieb in deutscher Schrift, die Aufgabenstellung ist deshalb nur schwer zu entziffern und sie war höchstwahrscheinlich nur handschriftlich an der Tafel im Prüfungsraum vorhanden (es gab keinen Kopierer!). Selbstverständlich standen Albert Einstein für Funktionswerte trigonometrischer Funktionen, komplexe Multiplikationen, Potenzierungen und Wurzelziehen nur eine Logarithmentafel (kein Taschenrechner!) sowie sicherlich eine Formelsammlung zur Verfügung (möglicherweise auch ein Rechenschieber).

Der entzifferte Aufgabentext:

Von einem Dreieck kennt man die Abstände $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ *des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises von den Ecken; man ermittle den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises.*

$\boldsymbol{l} = 1 \quad \boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \quad \boldsymbol{n} = \frac{1}{3}$



Der Ansatz mit den drei Gleichungen ist leicht verständlich und die trigonometrische allgemeine Beziehung für jedes Dreieck hat er nicht hergeleitet, sondern einer Formelsammlung entnommen. Man erhält sie höchstwahrscheinlich aus dem Ansatz:

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \sin(90°) = 1$, Anwendung geeigneter Additionstheoreme, Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus wie z.B. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$, sowie dem ‘Pythagoras der Trigonometrie’.[4]

Wenn wir hier die Beziehung $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1$ einfach akzeptieren, weil uns mehr das Nachfolgende interessiert, dann ist die Herleitung der kubischen Gleichung:

$$\boxed{14\cdot\rho^2 + 12\cdot\rho^3 - 1 = 0}$$

leicht und da in dieser Gleichung kein linearer Summand auftaucht, führt hier als Transformation die Kehrwertbildung der Variablen zu einer kubischen Gleichung ohne quadratisches Glied. Somit ist die Gleichung zu lösen:

$$\boxed{x^3 - 14\cdot x - 12 = 0}$$

Nun wollen wir anwenden, was wir über die Cardanosche Formel gelernt haben. Kommen wir zum gleichen Ergebnis wie Albert Einstein?

---

2 ✳ 14. März 1879 in Ulm; † 18. April 1955 in Princeton, New Jersey; trage in geeigneten Quellen mehr Informationen über das ‘Genie’ Albert Einstein zusammen!

3 Copyright © Staatsarchiv Aargau (Schweiz), Signatur StAAG DE/KS05/1896/2270

4 Für Interessierte: Siehe Anhang.

Von einem Dreieck kennt man die Abstände l, m, n des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises von den Ecken, man ermittle den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises. $l=1$ $m=\frac{1}{2}$ $n=\frac{1}{3}$ — Albert Einstein

6.

Aufgabe 1

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{l} = \varrho$$
$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{m} = 2\varrho$$
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{n} = 3\varrho$$

Da nun allgemein für jedes Δ:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$$

so lautet die Gleichung nach Einsetzung der obigen Werte:

$$14\varrho^2 + 12\varrho^3 - 1 = 0 \qquad \varrho = \frac{1}{x}$$
$$\frac{14}{x^2} + \frac{12}{x^3} - 1 = 0$$
$$14x + 12 - x^3 = 0$$

oder:

$$x^3 - 14x - 12 = 0$$

Nun wird die Cardanische Formel angewandt.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$ wobei $p = -14$, $q = -12$

Die Diskriminante

$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ $\cancel{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ist negativ, folglich ihre Wurzel irrational.

Man hat also die trigonometrische Methode anzuwenden, wobei

$$\cos u = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}} = \frac{6}{}$$

$$\log(\cos u) = \log 6 + \tfrac{3}{2}\log 3 - \tfrac{3}{2}\log 14$$

$$= 0{,}77815 + 0{,}71568 - 1{,}71919$$

$$= 9{,}77474 - 10$$

$$u = 53^\circ\, 28'\, 4''$$

Die ~~andern~~ 3 Wurzeln heissen

$$2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\,\cos\frac{u}{3}$$

$$2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{u}{3}+120^\circ\right)$$

$$2\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{u}{3}+240^\circ\right)$$

Brauchbar sind für das Problem nur positive Wurzeln. Da nun $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ positiv ist, so muss der andere Faktor auch positiv sein, damit das Produkt positiv werde.

$\frac{u}{3}$ ist ein spitzer Winkel, folgl. sein Cosinus positiv, folglich die erste Wurzel brauchbar. Der Cosinus des zweiten Winkels (im 2. Quadranten gelegen) ist negativ, folglich die Wurzel unbrauchbar. Der Cosinus des dritten $\frac{u}{3} + 240$ ist kleiner als 270°, ist also noch im dritten Quadranten, ~~seine Werte~~ die 3. Wurzel also unbrauchbar.

$$\log(x) = \log 2 + \tfrac{1}{2}\log\frac{14}{3} + \log\cos 17^\circ 49' 21''$$

$$\log x = 0{,}61420 \qquad \log 10\rho = 0{,}38580$$

$$\rho = 0{,}243$$

Nach Cardanoscher Formel gilt für die Lösung von $\boxed{x^3 - 3\cdot a\cdot x - 2\cdot b = 0}$:

$$x = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}},$$

das bedeutet konkret für die Lösung der kubischen Gleichung $\boxed{x^3 - 14\cdot x - 12 = 0}$:

$$x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{36 - \frac{2744}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{36 - \frac{2744}{27}}}$$

Bestätige den obigen Lösungsansatz und die folgenden Zwischenergebnisse[5] für x = u + v:

$$\begin{array}{ll} u_1 \approx +2{,}05655 + 0{,}66128\cdot i & v_1 \approx +2{,}05655 - 0{,}66128\cdot i \\ u_2 \approx -1{,}60096 + 1{,}45038\cdot i & v_2 \approx -0{,}45559 - 2{,}11166\cdot i \\ u_3 \approx -0{,}45559 - 2{,}11166\cdot i & v_3 \approx -1{,}60096 - 1{,}45038\cdot i \end{array} .$$

Unter Beachtung von $u\cdot v = \frac{14}{3}$ ergibt sich nur die eine positive, reelle Lösung: $x := u_1 + v_1 \approx 4{,}11310$.

Endergebnis:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} := \frac{1}{4{,}11310} \approx 0{,}24313}$$

Vergleiche dein Ergebnis mit dem von Albert Einstein auch in Bezug auf die Polarkoordinaten beim Wurzelziehen im Bereich der komplexen Zahlen. - Zufrieden mit dem Ergebnis?

---

[5] Wähle zur Sicherheit eine größere Taschenrechnergenauigkeit; gute Logarithmentafeln hatten früher mindestens eine Genauigkeit von 8 Nachkommastellen.

<u>Anhang:</u>

Nachweis der zuvor angewandten trigonometrischen Beziehung:[6]

$$
\begin{aligned}
& \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 - \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 - \cos^2\left(90° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(90° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\right) \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 - \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^2 \\
& + 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
& - 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
& + 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left[1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left[1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] + 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
= {} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
= {} & 1
\end{aligned}
$$

---

[6] von Thilo Steinkrauß