

Cassinische Kurven

Cassinische Kurven sind definiert als geometrische Örter: Bei zwei vorgegebenen Brennpunkten F_1 und F_2 sind sie festgelegt als die Menge aller Punkte P , deren Abstandsprodukt $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$ konstant ist.

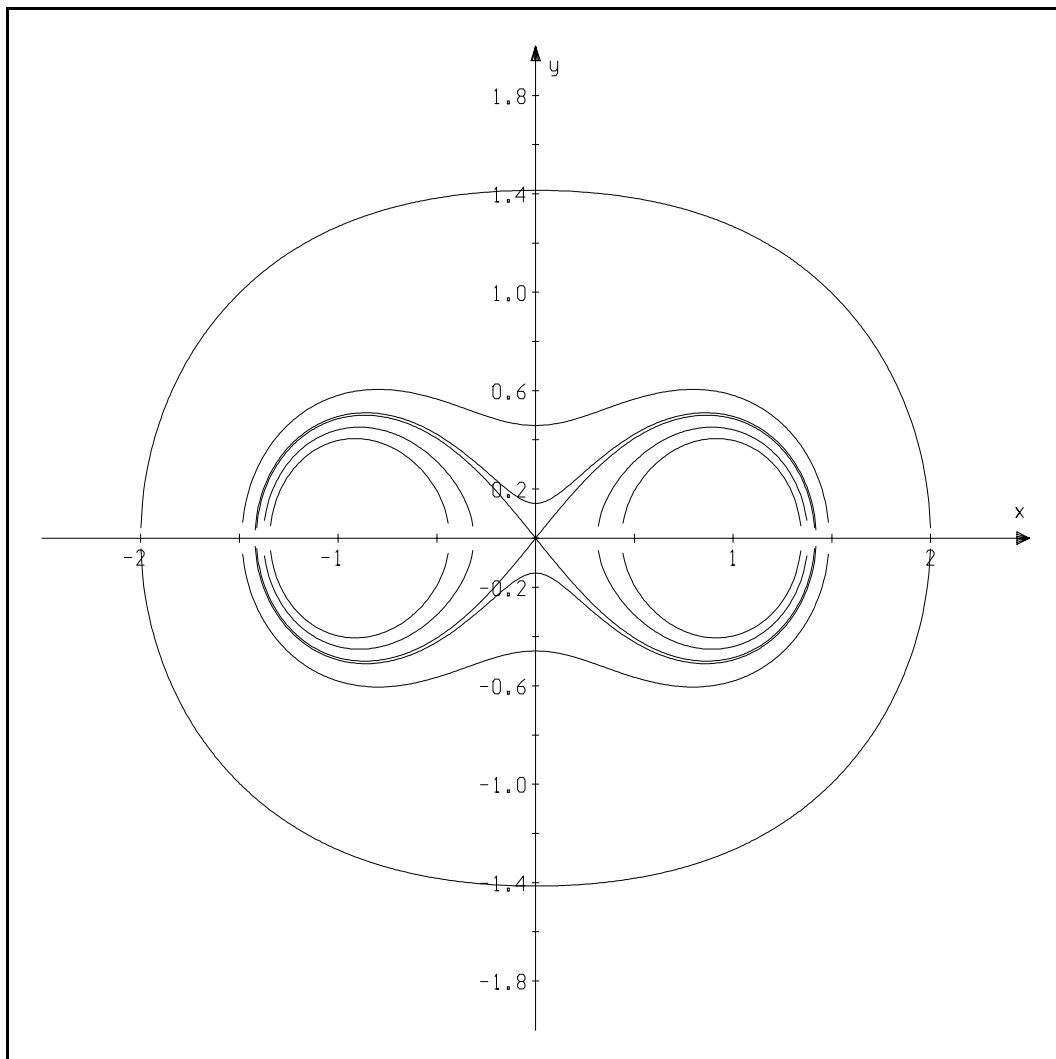
Wenn $\overline{F_1F_2} = 2 \cdot c$ die Entfernung der beiden Brennpunkte und $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = a^2$ das Entfernungsprodukt ist, so genügen die Koordinaten der Kurvenpunkte der folgenden Gleichung:¹

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot c^2 \cdot (x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

Löst man diese Gleichung nach y auf, ergibt sich für $c = 1$:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{-(x^2 + 1) + \sqrt{4 \cdot x^2 + a^4}}$$

Für $a = c$ (hier $a = c = 1$) ergibt sich die Bernoullische Lemniskate als Spezialfall einer Cassinischen Kurve. Für $a < c$ ergeben sich zwei getrennte Ovale. Für $a < c \cdot \sqrt{2}$ haben die Kurven Einbuchtungen. Für $a > c \cdot \sqrt{2}$ ergibt sich das elliptische Aussehen, das wohl der Grund für den "Streit" zwischen Cassini und Kepler hinsichtlich der Beschreibung der Planetenbahnen war.



Gleichung für Cassinische Kurven

Seien $F_1(-c|0)$ und $F_2(c|0)$ gegeben und $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt, dessen "Produktentfernung" $d_1 \cdot d_2$ von F_1 und F_2 gleich a^2 ist, so gilt:

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2.$$

Daraus folgt: $((x + c)^2 + y^2) \cdot ((x - c)^2 + y^2) = a^4$

$$\Leftrightarrow (x + c)^2 \cdot (x - c)^2 + (x + c)^2 \cdot y^2 + y^2 \cdot (x - c)^2 + y^4 = a^4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - c^2)^2 + x^2y^2 + 2x^2cy^2 + c^2y^2 + y^2x^2 - 2y^2xc + y^2c^2 + y^4 = a^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2c^2x^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 + y^4 = a^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 = a^4 - c^4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2c^2 \cdot (x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

Oder nach y aufgelöst:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 = a^4 - c^4$$

$$y^4 + (2x^2 + 2c^2) y^2 = -x^4 + 2c^2x^2 + a^4 - c^4$$

$$y_{1,2}^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{x^4 + 2x^2 \cdot c^2 + c^4 - x^4 + 2c^2 \cdot x^2 + a^4 - c^4}$$

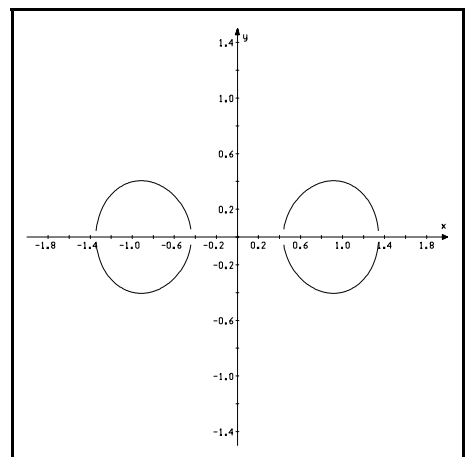
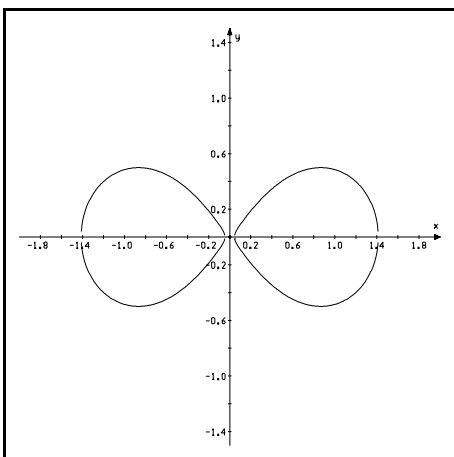
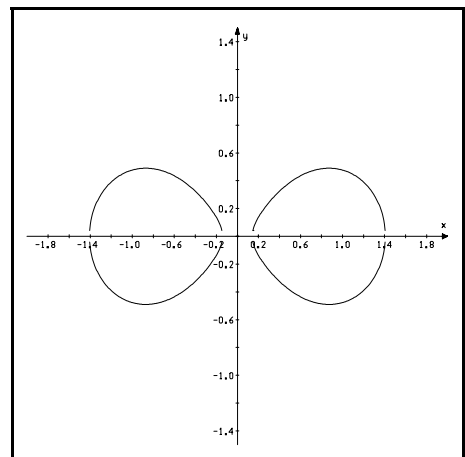
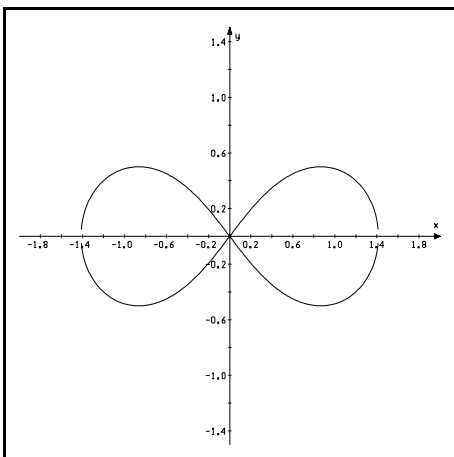
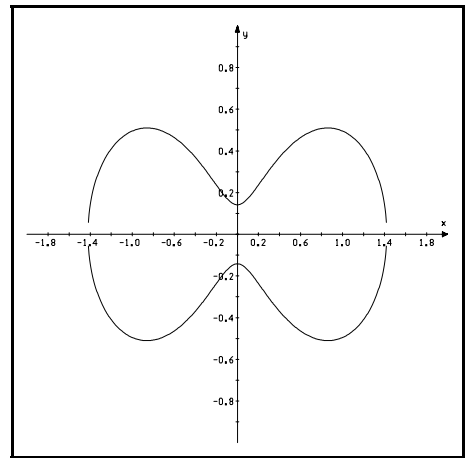
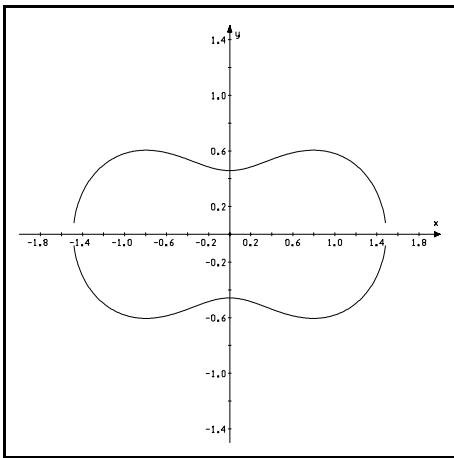
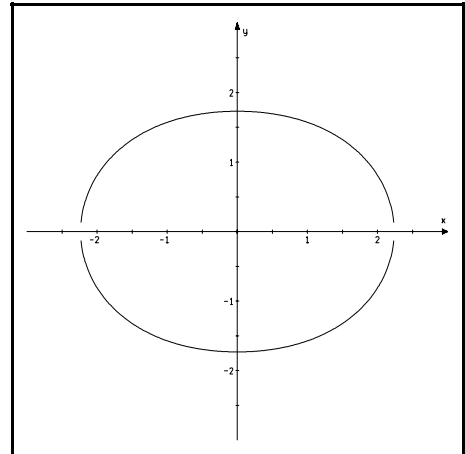
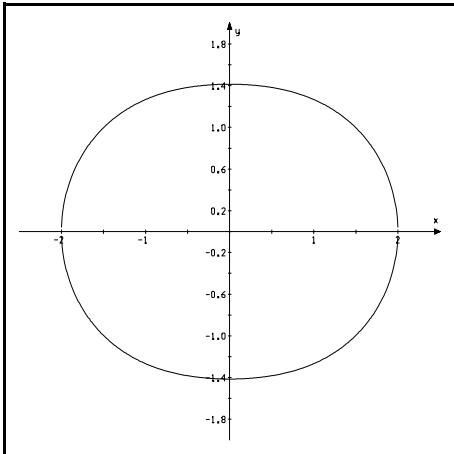
$$y_{1,2}^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{4c^2 \cdot x^2 + a^4}$$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{-(x^2 + c^2) + \sqrt{4c^2 \cdot x^2 + a^4}}$$

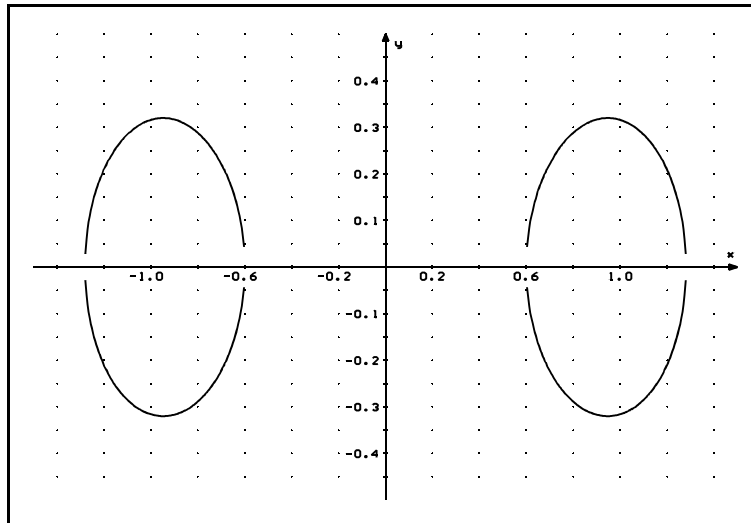
Das negative Vorzeichen vor der inneren Wurzel spielt selbstverständlich keine Rolle, da sich sonst keine reellen Zahlen für $y_{1,2}$ ergeben würden!

Die folgenden Kurven wurden für $c = 1$ (die Brennpunkte der Kurven sind also $F_1(-1|0)$ und $F_2(1|0)$) ausgedrückt.

Gleichung für Cassinische Kurven



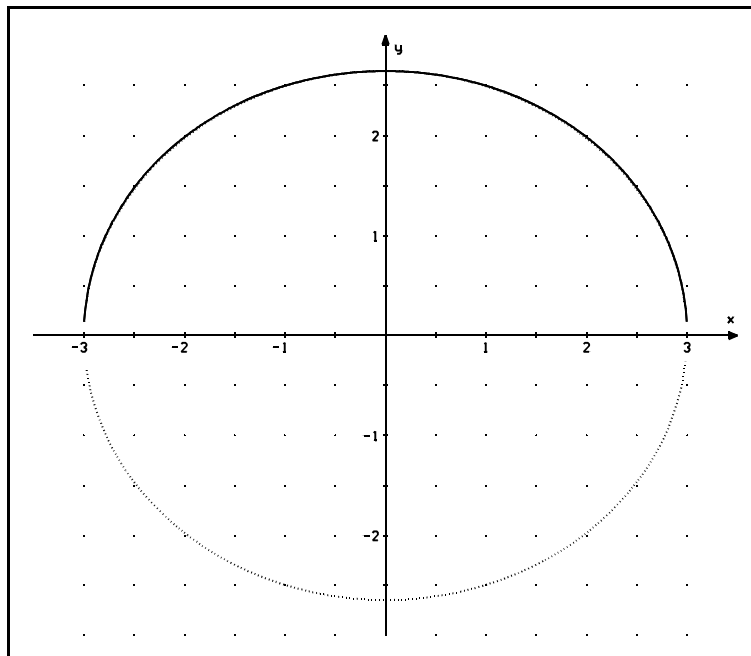
Gleichung für Cassinische Kurven



Die cassinische Kurve für $c = 1$ und $a = 0,8$.

Der obere Ast wird definiert durch $f(x) = \sqrt{-(x^2 + 1) + \sqrt{4 \cdot x^2 + 0,8^4}}$.

Aufgabe: Bestimme den Definitionsbereich des Graphen (untersuche also, für welche x -Werte der Radikand nicht negativ wird).



Die cassinische Kurve für $c = 1$ und $a = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und sowie die Funktionsgleichungen des oberen und unteren Ellipsenastes einer Ellipse mit den Halbachsen: $a = 3$ und $b = \sqrt{7}$.

Cassini, Jean Dominique (1625 - 1712)

Cassini: Französische Astronomenfamilie italienischer Herkunft.

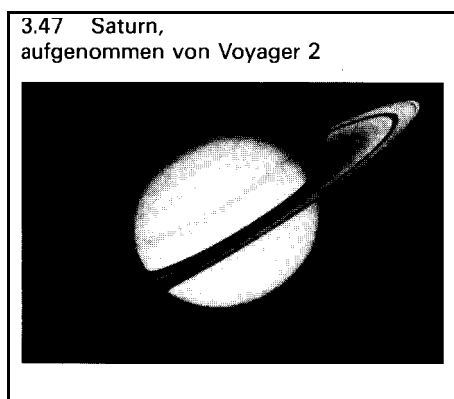
J. D. C.: Begründer der Direktorendynastie, die bis zum Urenkel der Sternwarte Paris vorstand.

Gegner Johannes Keplers (natürlich nur im Geiste) hinsichtlich der Planetenbahnen.

1671 bestimmt er aus Pendelmessungen (die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels hängt u.a. von der Gravitationsbeschleunigung ab) die Abplattung der Erde. (Diese Abplattung war Anlass heftiger "Auseinandersetzungen": Descartes Behauptung, die Erde habe eine "Zitronenform", wurde von seinen Anhängern, den Cartesianern, zu denen auch Cassini gehörte, gegen Newtons Theorie, die eine Abplattung der Erde an den Polen verlangt, aufrecht erhalten. (Messungen in Frankreich zwischen 1700 und 1720 hatten die Cartesische Behauptung "bestätigt".) Zwei Expeditionen nach Peru (1735) und dann 1736/37 nach Lappland unter Leitung von Pierre de Maupertuis (auch Celsius und der Mathematiker Clairaut (Differentialgleichungen!) gehörten dieser Expedition an; Clairaut war es, der 1759 aus Bahnstörungen des Halleyschen Planeten auf einen noch unbekanntem Planeten schloss: Herschel entdeckte ihn (Uranus) 1781) lieferten dann endgültig durch Ausmessung von Längengraden eine Bestätigung der Newtonschen Theorie, die ab 1738 dann auch in Frankreich gängige Lehrmeinung war. (In der Folge wurde Maupertuis 1743 Mitglied der 40 Unsterblichen und 1746 unter Friedrich dem Großen Präsident der Berliner Akademie.)

1671 C. entdeckt vier Saturnmonde und 1675 die nach ihm benannte "1800 km breite (s.u.)" Teilung des Saturnrings.

1672 Erstmals wurde durch Simultanmessungen von Cassini (Paris) und Richter (Cayenne) der Erdbahndurchmesser aus der Entfernung eines erdnahen Planeten (Mars) und Anwendung des dritten Keplerschen Gesetzes bestimmt. (Nach dem 3. Keplerschen Gesetz lässt sich aus den Umlaufzeiten zweier Planeten um die Sonne und der Entfernung eines Planeten von der Sonne direkt die Sonnenentfernung des anderen Planeten berechnen.)



Durchmesser des Gesamtrings: ca. 280 000 km.

Ringdicke: ca. 3 km.

Zum Vergleich: Entfernung Erde - Mond: ca. 385 000 km.

Äquatordurchmesser: ca. 120 000 km (= 9 bis 10 Erddurchmesser).

Fotos der Voyager-Sonden zeigen, daß der Saturnring eine ausgeprägte Feinstruktur aufweist und aus etwa 100 Einzelringen und Leerzonen zusammengesetzt ist, so dass die ursprüngliche, auf teleskopische Beobachtungen von der Erde aus zurückgehende Einteilung mit der Cassinischen Teilung zwischen A- und B-Ring nur noch eine grobe Orientierungshilfe darstellt.

(Quelle: bsv GK Astronomie.)