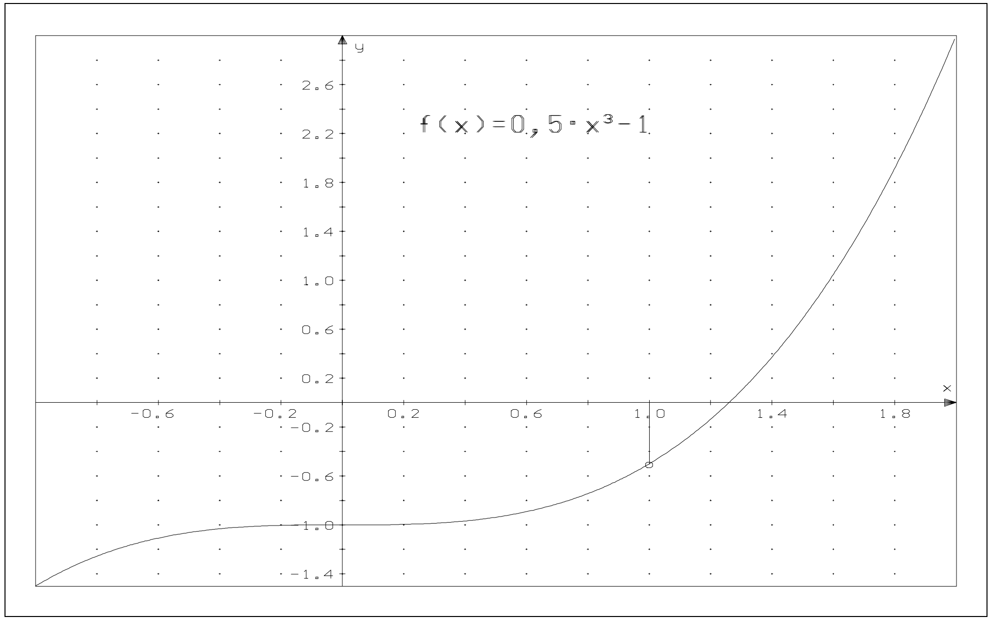
Das ‘Dreifolgenproblem’



Gegeben ist die Funktion **f** mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 1$. Bestimmt werden soll das lokale Wachstum der Funktion im Punkt **P**$(x_0 \mid f(x_0))$ = **P**(1 | -0,5) . - Betrachtet werden die drei Folgen:

(1) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{x_0 + h_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

(2) $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{f(x_0 + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

(3) $\left\{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge auf der x-Achse mit dem Grenzwert $\mathbf{x_0 = 1}$, die induzierte Funktionswertfolge mit dem Grenzwert $\mathbf{f(x_0) = -0{,}5}$, sowie die zugehörige Differenzenquotientenfolge.

a) Zeichnen Sie die ersten 4 Sekanten (Geraden) durch die Punktepaare: **P**$(x_0|f(x_0))$ und $\mathbf{Q_n}(x_n|f(x_n))$ in die nebenstehende Graphik ein!

b) Ergänzen Sie in der linken und rechten (andere Nullfolge!) Tabelle die 5. Zeilen!

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Differenzenquotientenfolgen. Setzen Sie für das Nullfolgenglied auf der x-Achse allgemein den algebraischen Ausdruck $\mathbf{h_n}$!

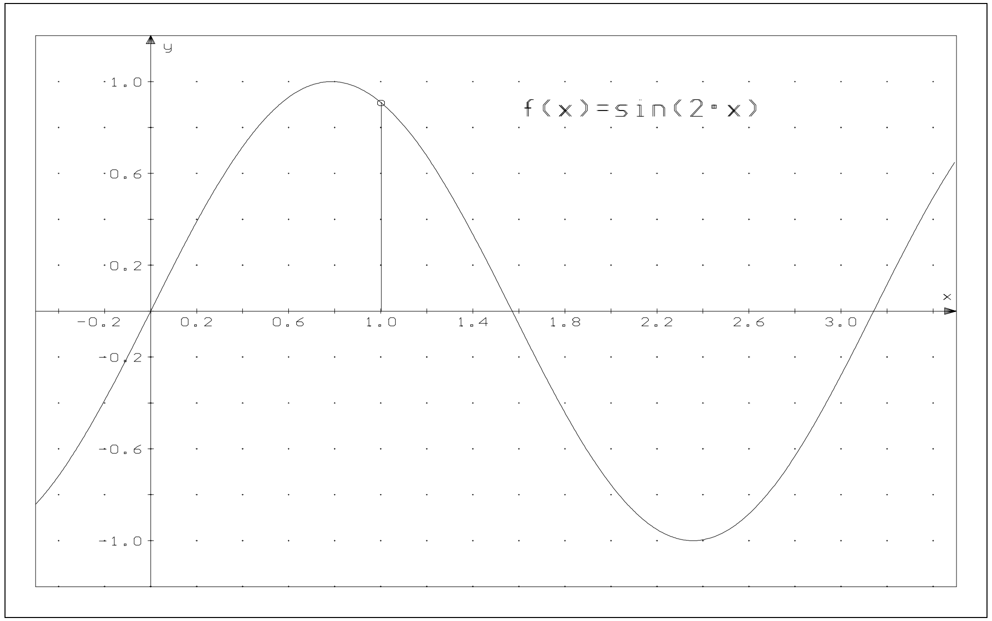
$\mathbf{x_0 = 1}$ $\mathbf{f(x_0) = -0{,}5}$ $\mathbf{h_n := \frac{(-1)^n}{n}}$

n	h_n	$f(x_0+h_n)$	$f(x_0+h_n) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$
1	-1,00000000	-1,00000000	-0,50000000	0,50000000
2	0,50000000	0,68750000	1,18750000	2,37500000
3	-0,33333333	-0,85185185	-0,35185185	1,05555556
4	0,25000000	-0,02343750	0,47656250	1,90625000
5				
10	0,10000000	-0,33450000	0,16550000	1,65500000
100	0,01000000	-0,48484950	0,01515050	1,51505000

$\mathbf{x_0 = 1}$ $\mathbf{f(x_0) = -0{,}5}$ $\mathbf{h_n := \frac{1}{n!}}$

n	h_n	$f(x_0+h_n)$	$f(x_0+h_n) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$
1	1,00000000	3,00000000	3,50000000	3,50000000
2	0,50000000	0,68750000	1,18750000	2,37500000
3	0,16666667	-0,20601852	0,29398148	1,76388889
4	0,04166667	-0,43485966	0,06514034	1,56336806
5				
10	0,00000028	-0,49999959	0,00000041	1,50000041
20	0,00000000	-0,50000000	0,00000000	0,00000000 ?

Das ‘Dreifolgenproblem’



Gegeben ist die Funktion **f** mit $f(x) = \sin(2\cdot x)$. Bestimmt werden soll das lokale Wachstum der Funktion im Punkt $\mathbf{P}(x_0 \mid f(x_0)) = \mathbf{P}(1 \mid \sin(2))$. **-** Betrachtet werden die drei Folgen:

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{x_0 + h_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \frac{-1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

(2) $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f(x_0 + h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

(3) $\left\{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, eine Folge auf der x-Achse mit dem Grenzwert $\mathbf{x_0 = 1}$, die induzierte Funktionswertfolge mit dem Grenzwert $\mathbf{f(x_0) \approx 0{,}91}$, sowie die zugehörige Differenzenquotientenfolge.

a) Zeichnen Sie die ersten 4 Sekanten (Geraden) durch die Punktepaare: $\mathbf{P}(x_0 \mid f(x_0))$ und $\mathbf{Q_n}(x_n \mid f(x_n))$ in die nebenstehende Graphik ein!

b) Ergänzen Sie in der linken und rechten (andere Nullfolge!) Tabelle die 5. Zeilen!

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Differenzenquotientenfolgen propädeutisch-näherungsweise durch Berechnung von Folgengliedern großer Indexzahlen mit dem TR!

$\mathbf{x_0 = 1}$ $\mathbf{f(x_0) \approx 0{,}90929743}$ $\mathbf{h_n := \frac{-1}{\sqrt{n}}}$

n	h_n	$f(x_0+h_n)$	$f(x_0+h_n) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$
1	-1,00000000	0,00000000	-0,90929743	0,90929743
2	-0,70710678	0,55285487	-0,35644255	0,50408589
3	-0,57735027	0,74816984	-0,16112759	0,27908117
4	-0,50000000	0,84147098	-0,06782644	0,13565288
5				
10	-0,31622777	0,97941535	0,07011793	-0,22173235
100	-0,10000000	0,97384763	0,06455020	-0,64550204

$\mathbf{x_0 = 1}$ $\mathbf{f(x_0) \approx 0{,}90929743}$ $\mathbf{h_n := \frac{(-1)^n}{n^2}}$

n	h_n	$f(x_0+h_n)$	$f(x_0+h_n) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$
1	-1,00000000	0,00000000	-0,90929743	0,90929743
2	0,25000000	0,59847214	-0,31082528	-1,24330113
3	-0,11111111	0,97865570	0,06935828	-0,62422450
4	0,06250000	0,85031979	-0,05897764	-0,94364219
5				
10	0,01000000	0,90079319	-0,00850424	-0,85042353
50	0,00040000	0,90896422	-0,00033321	-0,83302102