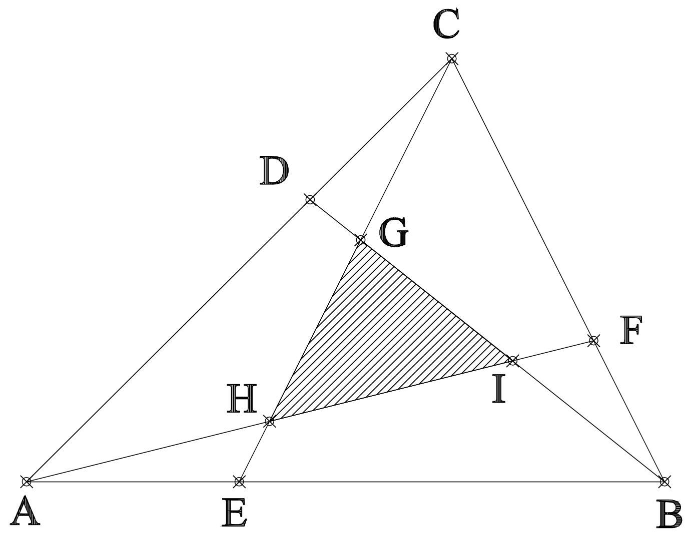
Teilungsverhältnis und Flächeninhalt

oder ...: Mit vektoriellen Methoden ist Vieles einfacher !

Möglicherweise ist dir die folgende Aufgabe schon aus Klassenstufe 9 bekannt, doch sie soll nun mit Methoden der Analytischen Geometrie gelöst werden.



Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck und finde Punkte **D**, **E**, **F** auf den Dreiecksseiten **CA**, **AB** und **BC** so, dass gilt:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2} \wedge \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2} \wedge \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2}$$

Zeichne die Strecken **AF**, **BD** und **CE** ein. Diese Strecken schneiden sich paarweise in den Punkten **G**, **H** und **I** (siehe Skizze).

Vielleicht erinnerst du dich: Die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** stehen im Verhältnis **7 : 1**, was im folgenden noch einmal bewiesen werden soll.

Aufgaben:

1. Bestimme die Teilungsverhältnisse, mit denen der Punkt **H** die Strecken **EC** und **AF** teilt.

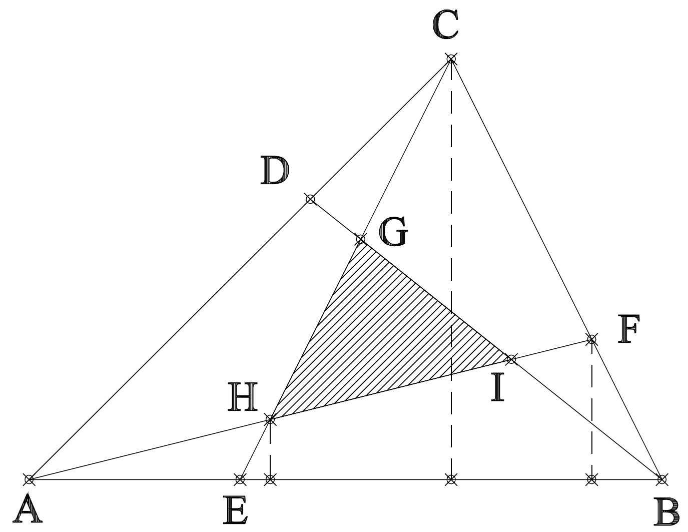
2. Begründe, dass der Punkt **I** die Strecken **FA** und **BD**, sowie der Punkt **G** die Strecken **DB** und **CE** im gleichen Verhältnis teilt wie **H** die Strecken **EC** und **AF**.

3. Begründe, dass für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAEH gilt:

   Grundseite: $\overline{AE} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$

   Höhe: $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{7} \cdot h$

   Flächeninhalt: $\Delta AEH = \frac{1}{21} \cdot \Delta ABC$



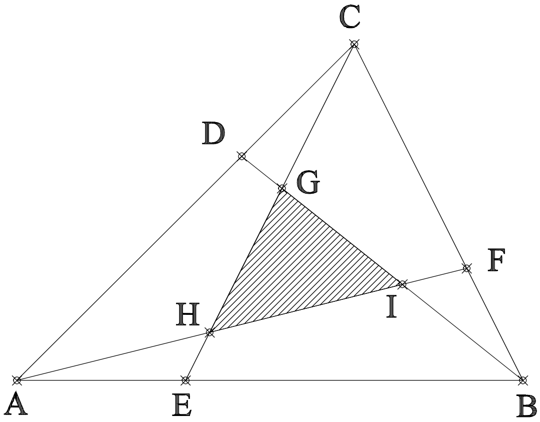
4. Begründe, dass für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABF gilt:

   Flächeninhalt: $\Delta ABF = \frac{1}{3} \cdot \Delta ABC$

5. Betrachte das Dreieck ΔABC aus Sicht einer anderen Grundseite und formuliere äquivalente Aussagen zu den Aufgaben 3 und 4. - Schließe aus diesen Ergebnissen und Aufgabe 4 auf die Behauptung.

Teilungsverhältnis und Flächeninhalt
oder ...: Mit vektoriellen Methoden ist Vieles einfacher !

<u>Lösungsskizze:</u>



Wir definieren den Punkt A als Ursprung eines 2-dimensionalen affinen Raumes und im zugehörigen Vektorraum die Verschiebungen:

$$\vec{a} := \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \vec{b} := \overrightarrow{AC}$$

Es gilt:

$$\vec{0} = \frac{1}{3}\cdot\vec{a} + x\cdot\overrightarrow{EC} + y\cdot\overrightarrow{FA}$$

$$\vec{0} = \frac{1}{3}\cdot\vec{a} + x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\vec{a} + \vec{b}\right) + y\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{a} - \frac{1}{3}\cdot\vec{b}\right)$$

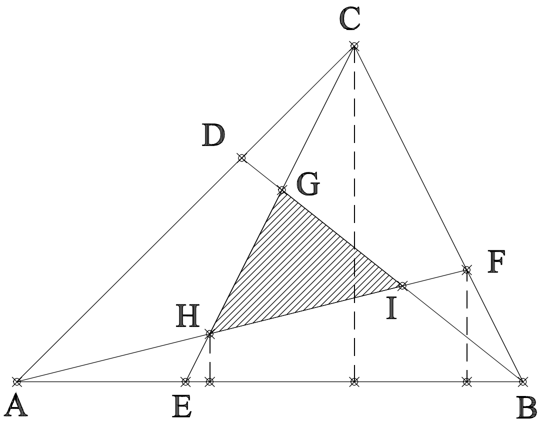
$$\vec{0} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y\right)\cdot\vec{a} + \left(x - \frac{1}{3}\cdot y\right)\cdot\vec{b}$$

Aus der Linearen Unabhängigkeit von $\left\{\vec{a}\ ;\ \vec{b}\right\}$ folgt zwangsläufig: $\left\{\begin{array}{lrcl} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y & = & 0 \\ \wedge & x - \frac{1}{3}\cdot y & = & 0 \end{array}\right\}$,

woraus sich leicht ergibt: $\boxed{x = \frac{1}{7} \ \wedge\ y = \frac{3}{7}}$.

Der Punkt H teilt also die Strecke EC im Verhältnis 1 : 6 und teilt die Strecke AF im Verhältnis 3 : 4.[1]

Damit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAEH:



Grundseite: $\overline{AE} = \frac{1}{3}\cdot\overline{AB}$

Höhe: $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot h = \frac{1}{7}\cdot h$

Flächeninhalt: $\Delta AEH = \frac{1}{21}\cdot\Delta ABC$

Mit äquivalenter Argumentation (wenn man das Ausgangsdreieck gezogen auf eine andere Grundseite betrachtet) gilt:

$$\Delta BFI = \frac{1}{21}\cdot\Delta ABC \text{ und } \Delta CDG = \frac{1}{21}\cdot\Delta ABC\,.$$

Subtrahiert man nun vom Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABF, ΔBCD und ΔCAE, so bleibt offensichtlich kein Flächenmaß übrig.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔHIG ist demnach gleich dem Flächeninhalt der 3 Dreiecke ΔAEH, ΔBFI und ΔCDG, die man bei der vorherigen Subtraktion doppelt abgezogen hat. Damit gilt:

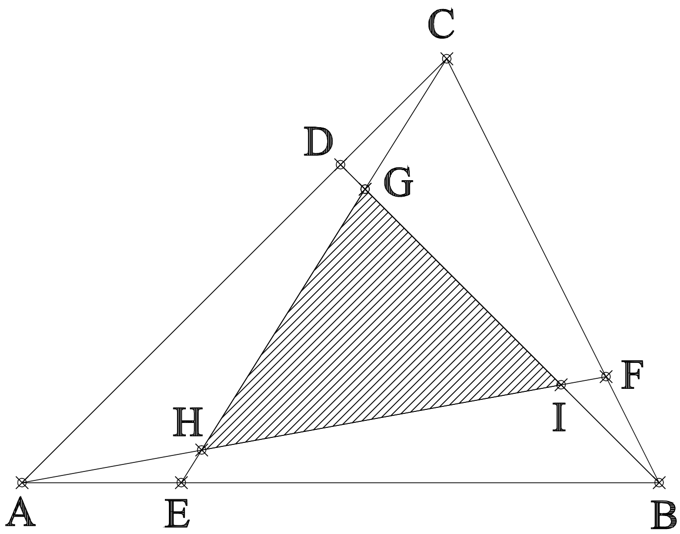
$$\Delta HIG = \frac{3}{21}\cdot\Delta ABC = \frac{1}{7}\cdot\Delta ABC$$

[1] Folgerung nach äquivalenter Argumentation mit anderer Grundseite: AH : HI : IF = BI : IG : GD = CG : GH : HE = 3 : 3 : 1

Teilungsverhältnis und Flächeninhalt

oder ...: Mit vektoriellen Methoden ist Vieles einfacher !

<u>Hausaufgabe (Übung):</u>



Wählt man auf den Dreiecksseiten ein anderes Teilungsverhältnis für die Teilungspunkte **E**, **F** und **D**, so ändert sich natürlich das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** zueinander.

Im nebenstehend skizzierten Fall gilt:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{3} \wedge \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{3} \wedge \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{3}$$

6. <u>Beweise:</u> Die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** stehen im Verhältnis **13 : 4**. - Ist für die Untersuchung von Bedeutung, dass das Dreieck **ΔABC** spitzwinklig ist?
   Was erwartet man für den Fall: $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{1} \wedge \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{1} \wedge \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{1}$?

<u>Verallgemeinerung 1:</u>

7. Es gelte: $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{n} \wedge \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{n} \wedge \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{n}$

   Bestätige: Die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** stehen im Verhältnis

$$\left[\, n^2 + n + 1 \,\right] : (n-1)^2$$

<u>Verallgemeinerung 2:</u>

8. Es gelte: $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{m}{n} \wedge \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{m}{n} \wedge \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{m}{n}$ $\quad (m < n;\ m,n \in \mathbb{N}^*)$

   Untersuche, in welchem Verhältnis die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** stehen.