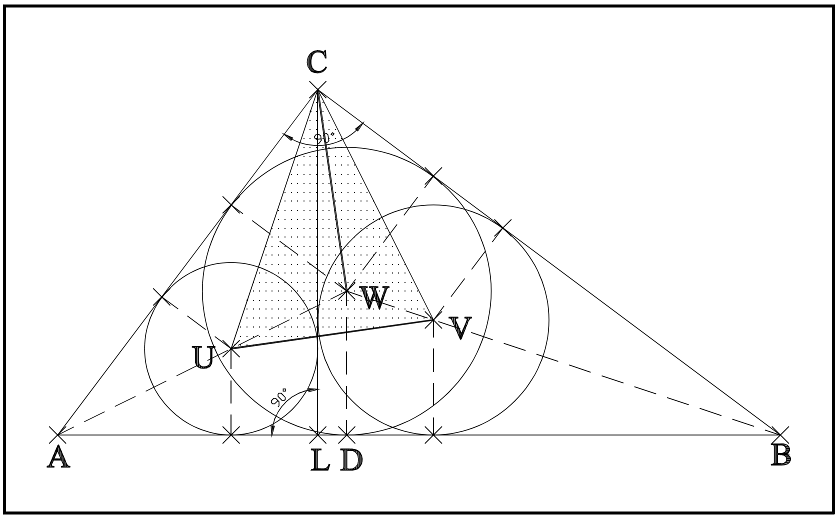
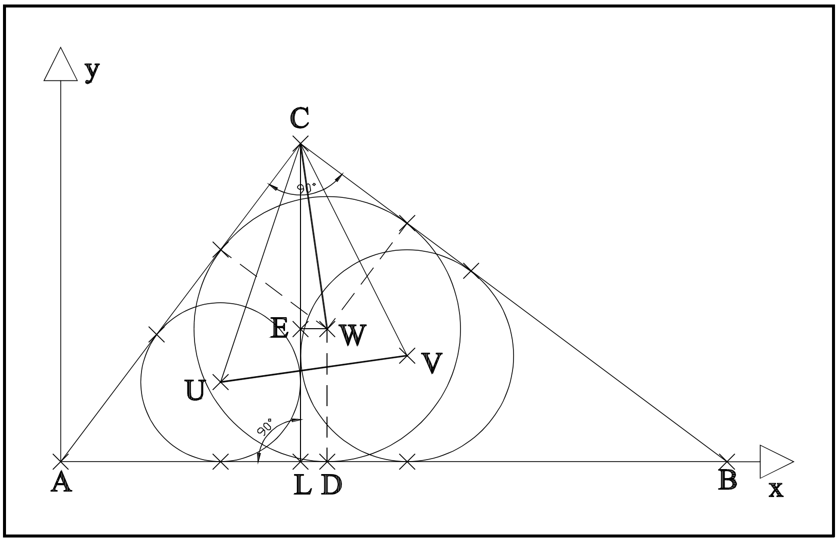
Übung: Abstände, Kreise, Winkel

Ein weiteres Mal: Bestätigung geometrischer Sachverhalte



Der nebenstehende Konstruktion ist möglicherweise schon aus der Sekundarstufe I bekannt. Wir nutzen die darin enthaltenen geometrischen Sachverhalte als rechentechnisches Übungsfeld.
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC ($\gamma = 90°$), das durch die Höhe h_c in zwei weitere rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Eingezeichnet sind dazu die drei Innenkreise der jeweiligen (Teil-) Dreiecke mit den Mittelpunkten U, V und W und den Radien r_U, r_V und r_W. Besonders gekennzeichnet ist auch noch das Dreieck ΔUVC.



Behauptungen:

1) $\overline{CW} = \overline{UV}$

2) $g(C;W) \perp g(U;V)$

3) W ist Höhenschnittpunkt im Dreieck ΔUVC

4) $r_U + r_V + r_W = h_c \; (= \overline{LC} \,)$

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Maßen a = 8 cm und b = 6 cm, so wie nebenstehend, in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgaben:

a) Bestimme die Maße von c, h, p und q unter Verwendung von Sätzen der Satzgruppe des Pythagoras.

b) Bestimme die Größen der Radien der drei Innenkreise und bestätige damit die Behauptung 4).[1]

c) Bestimme die Koordinaten der Punkte: B, L, C, U, V und W.
Tipp: CW ist Diagonale in einem Quadrat; zur Bestimmung der x-Koordinate von W das Dreieck ΔCEW betrachten.

d) Bestätige die Behauptung 1). (Zum Vergleich: $\overline{UV} = 2\cdot\sqrt{2}$)

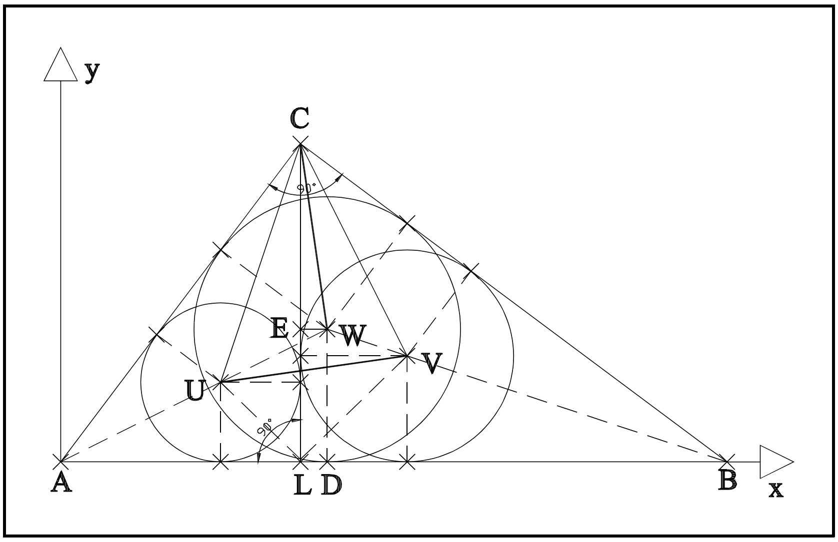
e) Bestätige die Behauptung 2) durch Bestimmung von Steigungsgrößen zugehöriger Geraden.

f) Bestimme Geradengleichungen der Winkelhalbierenden w_α und w_β und zeige, dass diese Winkelhalbierenden jeweils senkrecht zu einer Seite des Dreiecks ΔUVC verlaufen. Damit ist Behauptung 3) bestätigt.

[1] Erinnerung: In einem rechtwinkligen Dreieck gilt: $a + b = c + 2\cdot r_i$. Beweis?

Übung: Abstände, Kreise, Winkel

Ein weiteres Mal: Bestätigung geometrischer Sachverhalte



g) Bestätige, dass gilt:

$$\pi \cdot r_U^2 + \pi \cdot r_V^2 = \pi \cdot r_W^2$$

Interpretiere dieses Ergebnis geometrisch.

h) Berechne die Winkelgrößen von α und β, sowie die Größen der drei Innenwinkel des Dreiecks ΔUVC.

i) Bestätige, dass gilt:

$$\overline{\sphericalangle AUL} = \frac{\beta}{2} + 90°$$
$$\wedge \quad \overline{\sphericalangle LVB} = \frac{\alpha}{2} + 90°$$

Welcher allgemeine geometrische Sachverhalt verbirgt sich hinter den obigen Gleichungen? - Überprüfe diesen Sachverhalt an mindestens einem weiteren Beispiel.

j) Bestätige, dass gilt: $a \cdot r_V + b \cdot r_U = c \cdot r_W$. Interpretiere dieses Ergebnis geometrisch.

<u>Hinweis:</u> Allgemeine Nachweise findet man zum Teil im Nachtrag des Arbeitsblattes: „Rechtwinklige Dreiecke und Innenkreise“ (Klassenstufe 9).