Vollständige Induktion

Hausaufgaben - Lösungen

$n \in \mathbb{N}^*$

Binomialentwicklung: **B(n)** : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

1) **B(1)** : $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^0 \cdot b^1 = a+b$ ist wahr.

2) **B(n) ⇒ B(n+1)** : $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$

$$a \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \right) + b \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \right) =$$

$$a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^2 \cdot b^{n-1} + 1 \cdot a^1 \cdot b^n$$
$$+ \binom{n}{0} a^n \cdot b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^k + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^n + b^{n+1} =$$

NR.:[1]

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot (n-k+1) + n! \cdot k}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n \cdot b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k + \ldots + \binom{n+1}{n} a^1 \cdot b^n + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k$$

Satz von Moivre:[2] **M(n)** : $\left(r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot i \cdot \sin(\varphi)\right)^n = r^n \cdot \left(\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)\right)$

1) **M(1)** ist trivialerweise wahr.

---

1 Beachte: Diese kleine Rechnung ist der Hintergrund des Pascalschen Dreiecks!

2 Das Eulersche Theorem: $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = e^{i \cdot \varphi}$ können wir erst im 2. Semester (LK) über eine Reihenentwicklung beweisen. - Was wäre demnach: $e^{i \cdot \pi}$?

2) **M(n) ⇒ M(n+1)** : $\left(r\cdot\cos(\varphi) + r\cdot i\cdot\sin(\varphi)\right)^{n+1} = r^{n+1}\cdot\left(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\right)^{n+1} =$

$$r^{n+1}\cdot\left[\left(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\right)^{n}\cdot\left(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\right)\right] =$$

$$r^{n+1}\cdot\left[\left(\cos(n\cdot\varphi) + i\cdot\sin(n\cdot\varphi)\right)\cdot\left(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\right)\right] =$$

$$r^{n+1}\cdot\left[\cos(n\cdot\varphi)\cdot\cos(\varphi) - \sin(n\cdot\varphi)\cdot\sin(\varphi) + i\cdot\sin(n\cdot\varphi)\cdot\cos(\varphi) + i\cdot\cos(n\cdot\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right] =$$

$$r^{n+1}\cdot\left[\cos\left((n+1)\cdot\varphi\right) + i\cdot\sin\left((n+1)\cdot\varphi\right)\right] =$$

Bernoullische Ungleichung: **B(n)** : $(1 + x)^n > 1 + n\cdot x$ $\qquad 1 + x > 0\ ;\ x \neq 0\ ;\ n > 1$

1) **B(2)** : $(1 + x)^2 = 1 + 2\cdot x + x^2 > 1 + 2\cdot x$ ist wahr.

2) **B(n) ⇒ B(n+1)** : $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n\cdot(1 + x) > (1 + n\cdot x)\cdot(1 + x) =$

$$1 + (n + 1)\cdot x + n\cdot x^2 > 1 + (n + 1)\cdot x$$

Mächtigkeit einer Potenzmenge: **A(n)** : $|\wp(M)| = 2^n$ mit : $|M| = n$

1) **A(1)** : Wenn $|M| = 1$, dann gibt es genau 2 Teilmengen von M, nämlich die leere Menge und M selbst; also ist die Aussage wahr.

2) **A(n) ⇒ A(n+1)** : Sei $M := \{a_1, a_2, \ ..... \ , a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \ ..... \ , a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = M_1 \cup \{a_{n+1}\}$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es genau 2^n Teilmengen von M_1.

Fügt man zu jeder dieser Teilmengen von M_1 das Element a_{n+1} dazu, so entstehen 2^n weitere Teilmengen von M.

Damit hat man aber alle Teilmengen betrachtet, da nur die Möglichkeit besteht, dass a_{n+1} Element einer Teilmenge ist oder nicht.

Also gilt: $|\wp(M)| = 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ mit : $|M| = n+1$

Vollständige Induktion
Hausaufgaben - Lösungen

$n \in \mathbb{N}^*$

Binet - Formel: **F(n)**: $f_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

1) **F(1)**: $f_1 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{2\cdot\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$ ist wahr.

F(2): $f_2 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{4\cdot\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1$ ist wahr.

2) **(F(n) ∧ F(n+1)) ⇒ F(n+2)**:

$$f_n + f_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} = f_{n+2}$$