Vollständige Induktion
(Sind Mittelwerte wirklich in der Mitte?)

Es sei eine endliche Zahlenmenge positiver reeller Zahlen gegeben, die wir z.B. wie folgt bezeichnen können: $\mathbf{A} := \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \}$ und die der Größe nach durchnummeriert sein soll, d.h. es soll gelten: $\bigwedge\limits_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} a_i \le a_{i+1}$. - Was ist denn nun **der Mittelwert** dieser Zahlenmenge?

Je nach Ziel und Aufgabenstellung sind bekanntlich verschiedene "Mittelwerte" aussagekräftig, - erinnere dich an den früheren Unterricht in Beschreibender Statistik: *arithmetisches Mittel, geometrisches Mittel, harmonisches Mittel, Zentralwert (Median), Modalwert*. - Wie waren diese Begriffe eigentlich definiert und wozu waren sie nützlich?

Aufgabe: Informiere dich in geeigneter Literatur, z.B. in deinen alten Mitschriften aus dem Unterricht (noch auffindbar?) zur Beschreibenden Statistik über die Bedeutung der einzelnen Mittelwerte.

Wir wollen uns hier besonders mit dem arithmetischen Mittel und dem geometrischen Mittel beschäftigen, für die gilt:

$$m_A := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{und} \quad m_G := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \,.$$

Die Namensgebung kommt aus der Mittelung zweier Zahlen (arithmetisch) auf der Zahlengeraden als äquidistante Mitte oder (geometrisch) durch die flächengleiche Mittelung zweier Rechteckseiten durch Quadratseiten, und bekanntlich heißen Zahlenfolgen arithmetisch, wenn ein Folgenglied das arithmetische Mittel seines Vorgängers und Nachfolgers ist, und geometrisch, wenn ein Folgenglied geometrisches Mittel seines Vorgängers und Nachfolgers ist.

Aufgabe: Führe Proberechnungen zur Bestimmung von m_A und m_G in mindestens 4 verschiedenen Fällen durch. Die gewählten Zahlenmengen sollten durchaus aus mehr als 2 Elementen bestehen! - Vergleiche jeweils m_A und m_G auf Größe!

Auf der Basis der Beispieluntersuchungen erscheint dir sicher folgende Aussageform **A(n)** sinnvoll:

A(n): $$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^n \ge \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

d.h. das arithmetische Mittel ist niemals kleiner als das geometrische Mittel.

Induktionsanfang:

A(1): $a_1^1 \ge a_1$ ist trivialerweise wahr.

Dieser Induktionsanfang erscheint so trivial, dass wir vielleicht noch einmal die Aussage **A(2)** überprüfen:

Aufgabe: Verwende das Binom: $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} \right)^2$ geeignet !

Vollständige Induktion
(Sind Mittelwerte wirklich in der Mitte?)

Induktionsschluß (**A(n)** $\Rightarrow$ **A(n+1)**):[1]

A(n+1):
$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{n+1}$$

Nun ja, zugegeben, die rechte Seite sieht viel komplizierter aus, aber ohne Zurückführung auf die Induktionsvoraussetzung **A(n)** wird es wohl nicht gehen! - Deshalb: Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich!
Moment mal, der Faktor rechts "schreit" eigentlich nach Anwendung der Bernoullischen Ungleichung, um den Exponenten zum Verschwinden zu bringen! - Dazu muß man erst ein wenig umformen, so dass wir eine Summe mit einer **1** erhalten.

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{a_{n+1} + n\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{n+1}$$

$$\geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) \qquad (*)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n} \cdot a_{n+1}$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}$$

[1] Literatur: H. Heuser: Lehrbuch der Analysis 1; Teubner-Verlag

Vollständige Induktion
(Sind Mittelwerte wirklich in der Mitte?)

In der Zeile (*) wurde die Bernoullische Ungleichung verwendet, denn der Bruch rechts von der 1 ist sicher eine zulässige reelle Zahl x (Begründung?). - Wo wurde eigentlich die Induktionsvoraussetzung benutzt?

Eine andere Beweisidee des Induktionsschlusses kommt ohne die Verwendung der Bernoullischen Ungleichung aus und geht auf **Cauchy** zurück.

Aufgabe: Informiere Dich in geeigneter Literatur, Recherche im Internet o.ä. über den berühmten französischen Mathematiker **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857 ; Was für ein Geburtsjahr!?)

Cauchys Idee des Induktionsschlusses beruht zunächst auf der Verdoppelung von **n** und schließt dann von dort zurück auf **n-1**, also z.B. von **2** auf **4** und dann von **4** auf **3**
von **4** auf **8** und dann von **8** auf **7**, von **7** auf **6**, ...
von **8** auf **16** und dann von **16** auf **15**, von **15** auf **14**, ... usw

Induktionsschluß (1. **A(n)** $\Rightarrow$ **A(2n)**):[2]

A(2n):

$$\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i} = \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}}$$

$$\le \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i} \right) \qquad \text{wegen } \mathbf{A(2)}$$

$$\le \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{n+i} \right) \qquad \text{wegen } \mathbf{A(n)}$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} a_i$$

In der zweiten Zeile sind die n-ten Wurzeln natürlich zulässige reelle Zahlen, auf die **A(2)** anwendbar ist.

....

Induktionsschluß (2. **A(n)** $\Rightarrow$ **A(n-1)**):

Hier wendet **Cauchy** die Induktionsvoraussetzung **A(n)** (trickreich) auf die spezielle, natürlich zulässige reelle Zahl $\mathbf{b} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ an, die die rechte Seite der (rückwärtigen) Induktionsbehauptung darstellt!

Wegen **A(n)** gilt:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot b} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + b \right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i = b$$

---

[2] Literatur: H. Bachmann: Einführung in die Analysis 1; Diesterweg-Salle-Verlag

Vollständige Induktion
(Sind Mittelwerte wirklich in der Mitte?)

Teilt man nun durch $\sqrt[n]{b}$, so ergibt sich aus dem vorherigen:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \leq b^{1-\frac{1}{n}} = b^{\frac{n-1}{n}}$$

<u>Aufgabe:</u> Zeige, dass das Potenzieren mit dem Kehrwert des Exponenten die Induktionsbehauptung ergibt!

Ein sehr eleganter Beweis, auf den man nicht ohne weiteres kommt!
Dennoch, es lohnt sich sicher, die Gedanken nachzuvollziehen!
