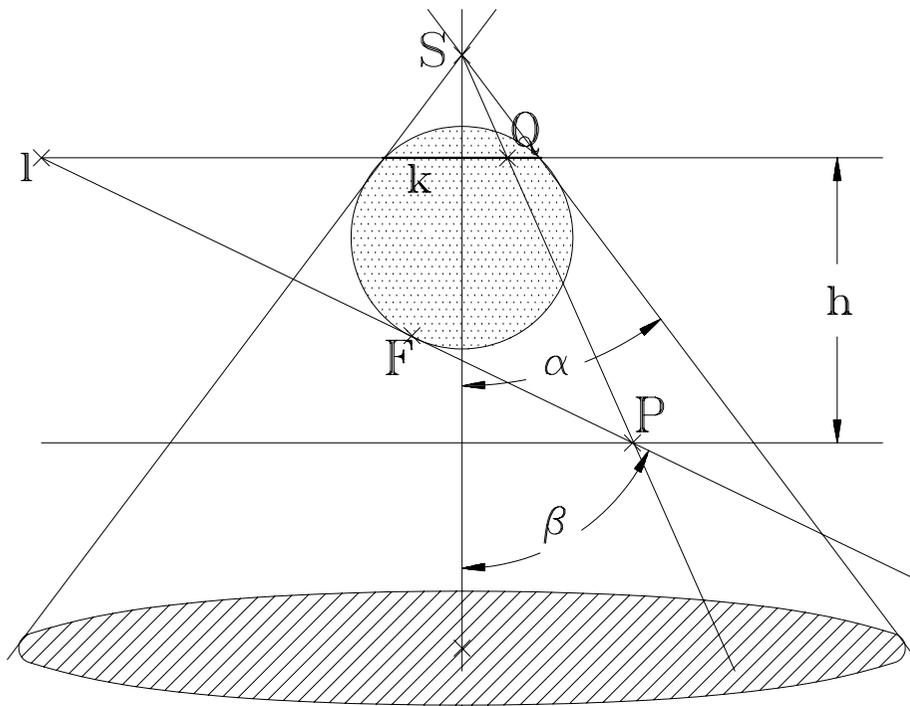


Zu den Kegelschnitten



Zum Skizzenverständnis:

In der nebenstehenden Figur¹ sieht man die den Kegel schneidende Ebene in Projektionsdarstellung als Gerade durch die Punkte **P** und **F**.

Mit eingezeichnet ist die obere Dandelinsche Kugel, welche die Schnittebene im Punkt **F** berührt und mit dem Kegel einen Berührungskreis **k** gemeinsam hat, der in der Projektionsdarstellung als Strecke auftaucht. Die Schnittkreisebene von **k** schneidet die Schnittebene der Kegelschnittsfigur in einer Geraden **I**, die in der Projektion wie ein Punkt erscheint.

Zur Definition der Kegelschnitte:

$\beta = 90^\circ$:	Kreis	
$\alpha < \beta$:	Ellipse	(2 Dandelinsche Kugeln; nur eine links dargestellt)
$\alpha = \beta$:	Parabel	(1 Dandelinsche Kugel)
$\alpha > \beta$:	Hyperbel	(2 Dandelinsche Kugeln; Doppelkegel)

Zur numerischen Exzentrizität ϵ :

Legt man von einem beliebigen Kegelschnittspunkt **P** Tangenten an die Dandelinsche Kugel, so sind die Entfernungen von **P** zu den Berührungspunkten stets gleich groß. Insbesondere gilt: $\overline{PF} = \overline{PQ}$, wobei **F** der Berührungspunkt der Kugel mit der Schnittebene ist und **Q** der Punkt der zu **P** gehörenden Mantellinie des Kegels, der auf dem Berührungskreis **k** liegt.²

Der Abstand **h** der Schnittkreisebene zur hierzu parallelen Ebene durch **P** lässt sich nun auf 2 Arten trigonometrisch berechnen: (1) $h = \overline{PI} \cdot \cos(\beta)$!
 (2) $h = \overline{PQ} \cdot \cos(\alpha)$

Mit $\overline{PF} = \overline{PQ}$ folgt:

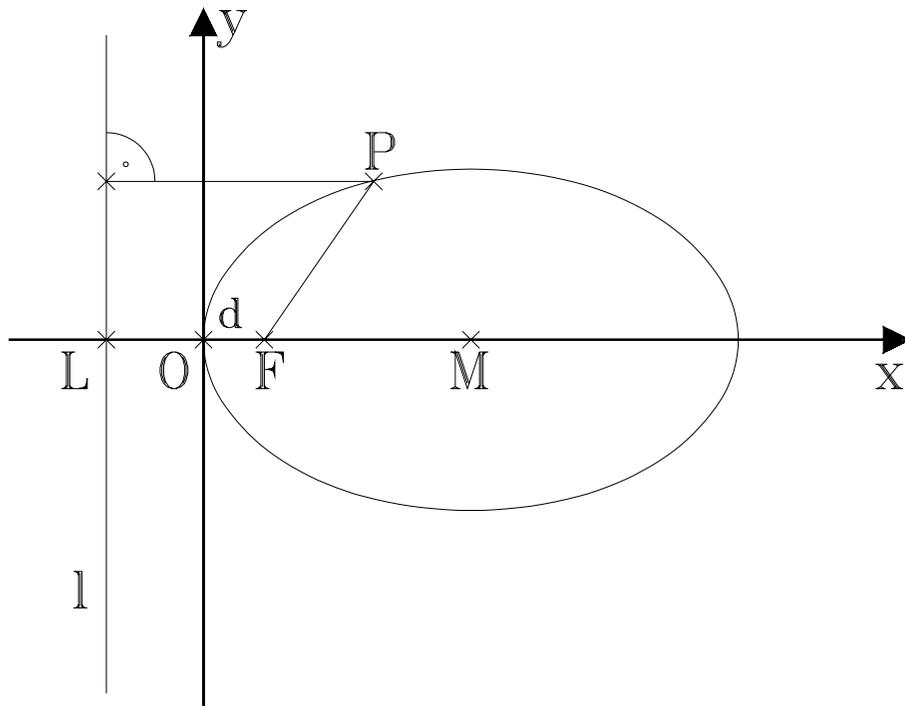
$$\overline{PI} \cdot \cos(\beta) = \overline{PF} \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\overline{PF}}{\overline{PI}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} =: \epsilon$$

Es gilt demgemäß: Für einen Kreis ist $\epsilon = 0$, für eine Ellipse $\epsilon < 1$, für eine Parabel $\epsilon = 1$, für eine Hyperbel $\epsilon > 1$!

¹ Eigentlich eine graphische Vermischung von Projektionsdarstellung und perspektivischer Skizze (der 'Grundkreis' des Kegels müsste eigentlich auch als Strecke dargestellt werden); doch mit dieser kleinen Ungenauigkeit kann man sich, glaube ich, den Sachverhalt besser räumlich vorstellen!

² Argumentiert man hier für die Ellipse genauso mit der unteren Dandelinschen Kugel, nämlich dass der Abstand des Punktes **P** zum unteren Berührungspunkt **F**₂ genauso groß wie der Abstand zum Punkt **Q**₂ der Mantellinie ist, der auf dem unteren Berührungskreis **k**₂ liegt, so folgt daraus, weil der Abstand der Berührungskreise konstant ist, dass für jeden Ellipsenpunkt die Summe der Abstände zu den Berührungspunkten (**F** und **F**₂) der Dandelinschen Kugeln mit der Schnittebene konstant ist.

Zu den Kegelschnitten



Zum Skizzenverständnis:

In der nebenstehenden Figur gilt: $\frac{\overline{OF}}{\overline{OL}} = \frac{d}{\overline{OL}} = \varepsilon \Rightarrow \overline{OL} = \frac{d}{\varepsilon}$

Die Gleichung der Leitlinie **l** lautet also: $x = -\frac{d}{\varepsilon}$.

Zur Scheitelpunktgleichung der Kegelschnitte:

Es gilt: $\frac{\overline{PF}}{\overline{Pl}} = \frac{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{\left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon \Rightarrow \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \varepsilon \cdot \left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)$

$$(x-d)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot \left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2dx + d^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot x^2 + 2\varepsilon dx + d^2$$

$$y^2 = 2d \cdot (\varepsilon + 1) \cdot x - (1 - \varepsilon^2) \cdot x^2$$

Mit $p := d \cdot (\varepsilon + 1)$ ergibt sich: $y^2 = 2 \cdot p \cdot x - (1 - \varepsilon^2) \cdot x^2$.

p gibt die y-Koordinate für die x-Koordinate: $x = d$, das heißt in 'Brennpunkthöhe' an (Nachrechnen!). Insbesondere bedeutet dies, dass in 'Brennpunkthöhe' die Breite des Kegelschnittes $2 \cdot p$ beträgt. - Für die Parabel gilt speziell: $\varepsilon = 1 \Rightarrow d = \frac{p}{2}$, also ist der Abstand des Brennpunktes zur Leitlinie gerade p .

Zur Mittelpunktsleichung von Ellipse und Hyperbel:

Ellipse und Hyperbel besitzen zwei Scheitel (y-Koordinate: 0), nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2 \cdot p}{1 - \varepsilon^2}$. Damit die Koordinaten des Mittelpunktes statt $M\left(\frac{p}{1 - \varepsilon^2} \mid 0\right)$ nun $M(0 \mid 0)$ werden, ist eine Verschiebung des Kegelschnitts in Scheitelpunktsform um $-\frac{p}{1 - \varepsilon^2}$ (=: $-a$) in x-Richtung durchzuführen. Für die kleine Halbachse b ergibt sich aus der Rechnung: $b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$. (Nachrechnen!)

Aufgabe: Berechne die x-Koordinaten der Brennpunkte ($x_{F1} =: -e$; $x_{F2} =: e$; e : lineare Exzentrizität) und bestätige, dass gilt: $a^2 = e^2 + b^2$.

Zu den Kegelschnitten

Lösungen der Aufgaben zur Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte ($\varepsilon \neq 1$):

- 1) Scheitelpunktsgleichung: $y^2 = 2 \cdot p \cdot x - (1 - \varepsilon^2) \cdot x^2$. Es ist eine Verschiebung in x-Richtung um $-\frac{p}{1-\varepsilon^2}$ durchzuführen!³

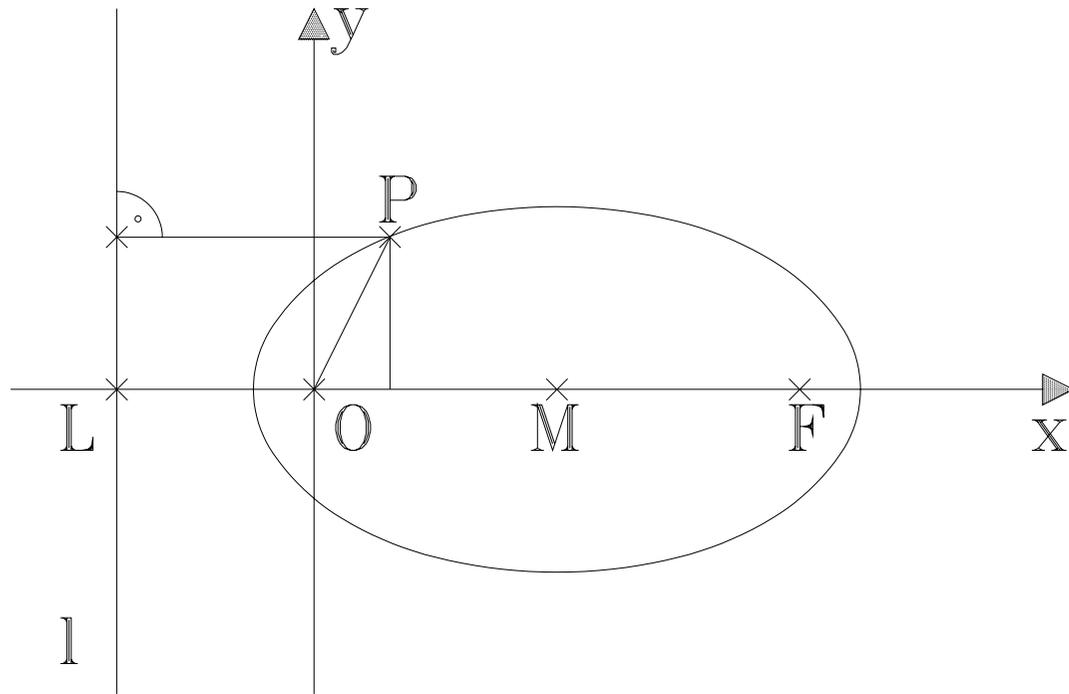
$$\Rightarrow \begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot \left(x + \frac{p}{1-\varepsilon^2} \right) - (1-\varepsilon^2) \cdot \left(x + \frac{p}{1-\varepsilon^2} \right)^2 \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot \left(x + \frac{p}{1-\varepsilon^2} \right) - (1-\varepsilon^2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{1-\varepsilon^2} + \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right) \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x + \frac{2 \cdot p^2}{1-\varepsilon^2} - (1-\varepsilon^2) \cdot x^2 - 2 \cdot p \cdot x - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y^2 + (1-\varepsilon^2) \cdot x^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} \\ \frac{(1-\varepsilon^2) \cdot x^2}{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}} = 1 \\ \frac{x^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)^2} = 1 \end{array} !$$

- 2) Die (negative) x-Koordinate des Brennpunktes eines Kegelschnittes ist nun: $-\frac{p}{1-\varepsilon^2} + d = -\frac{p}{1-\varepsilon^2} + \frac{p}{\varepsilon+1} = \frac{p \cdot (1-\varepsilon) - p}{1-\varepsilon^2} = -\varepsilon \cdot \frac{p}{1-\varepsilon^2} =: -e = -\varepsilon \cdot a$.

$$\text{Es gilt: } \mathbf{b^2 + e^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 \cdot p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p^2 \cdot (1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{\varepsilon^2 \cdot p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \mathbf{a^2} !$$

³ Im nachfolgend letzten Umformungsschritt wird eigentlich vorausgesetzt: $\varepsilon < 1$, d.h. der Fall der Ellipse oder des Kreises! - Bitte (als gute Übung) selber noch einmal die Veränderung der Umformungsschritte und der Endgleichung für den Fall der Hyperbel mit $\varepsilon > 1$ ansehen.

Zu den Kegelschnitten



Zur Polargleichung der Kegelschnitte (in Polarkoordinaten):

Es gilt:

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{Pl}} = \varepsilon \Rightarrow \overline{Pl} = \frac{r}{\varepsilon}$$
$$\overline{LO} = \frac{d}{\varepsilon} + d \Rightarrow \overline{LO} = \frac{p}{\varepsilon}$$

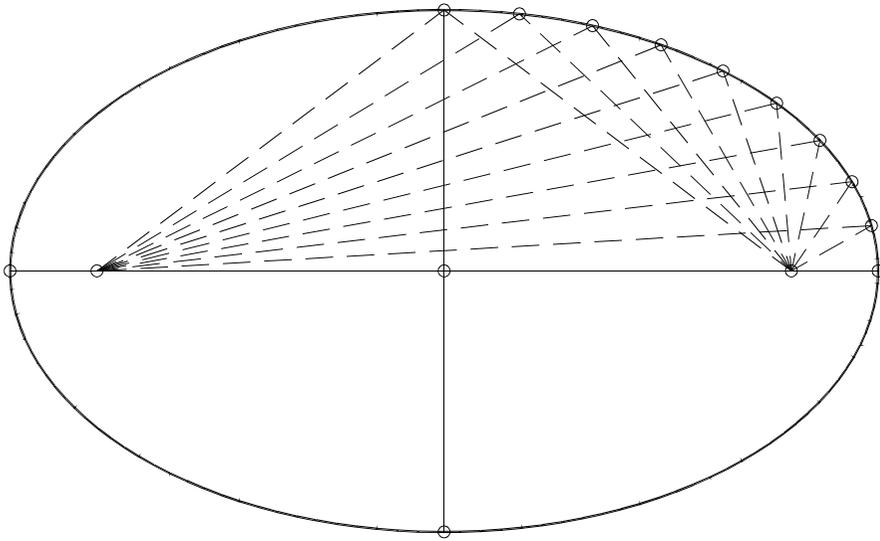
\Rightarrow

$$r \cdot \cos(\varphi) + \frac{p}{\varepsilon} = \frac{r}{\varepsilon}$$
$$\frac{r}{\varepsilon} - r \cdot \cos(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow r = \frac{\frac{p}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon} - \cos(\varphi)}$$
$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

Zu den Kegelschnitten

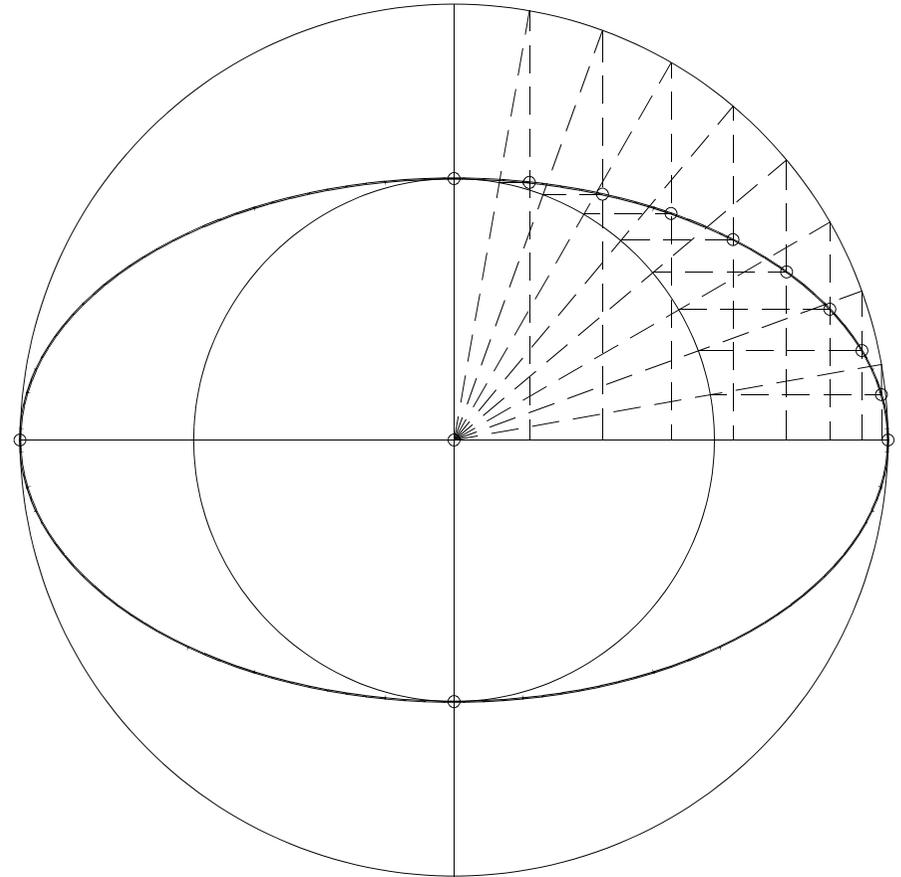
Zwei Ellipsenkonstruktionen:

Die Gärtnerkonstruktion



Es gilt: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2 \cdot a$
Nachrechnen!

Die Zweikreisconstruction



Es gilt: $x = a \cdot \cos(\varphi)$; $y = b \cdot \sin(\varphi)$
Die Ellipse als affines Bild des Kreises;
bestimme aus der Kreisgleichung die zugehörige Ellipsengleichung.

Zu den Kegelschnitten

Punktweise Konstruktion von Ellipse und Hyperbel in Scheitelpunktsform.

Es gilt: $\left(\varepsilon_1 = \frac{3}{5} \right) \wedge \left(\varepsilon_2 = \frac{5}{3} \right)$

Fertige eine eigene Konstruktion auf Millimeterpapier an.

Ab welcher Größe ist die Abstandsbedingung zur Leitlinie l_1 und zum Brennpunkt F unerfüllbar?

