Multiplikation in $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

1. Ansatz: $(a;b)\cdot(c;d) := (a\cdot c; b\cdot d)$

(1) Neutrales Element: $(1;1)$?
Wegen: $(a;b)\cdot(1;1) = (a\cdot 1; b\cdot 1)$

$\Rightarrow$ Reelle Zahlen besitzen kein inverses Element mehr !
(Wegen: $(a;0)\cdot(c;d) = (a\cdot c; 0\cdot d) = (1;1)$ ist unerfüllbar.)

$\Rightarrow$ $(1;0) \in \mathbb{R}\times\{0\} \cong \mathbb{R}$ ist neutrales Element !
(Dies war schon in allen bisherigen Zahlenmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ das neutrale Element.)

---

(2) $(a;b)\cdot(1;0) = (a\cdot 1 + ?; b\cdot 1 + ?)$

$(1;0)\cdot(a;b) = (1\cdot a + ?; 0\cdot a + 1\cdot b)$
(Wenn (1 ; 0) neutral ist und das Kommutativgesetz gelten soll, muß man offensichtlich alle 4 Produkte bilden.)

---

2. Ansatz: $(a;b)\cdot(c;d) := (a\cdot c + b\cdot d; b\cdot c + a\cdot d)$

Damit: $(a;b)\cdot(1;0) := (a\cdot 1 + b\cdot 0; b\cdot 1 + a\cdot 0) = (a;b)$
und $(1;0)\cdot(c;d) := (1\cdot c + 0\cdot d; 0\cdot c + 1\cdot d) = (c;d)$

Bestimmung eines inversen Elementes:

$(a;b)\cdot(x;y) := (a\cdot x + b\cdot y; b\cdot x + a\cdot y) = (1;0)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcccccl} & a\cdot x & + & b\cdot y & = & 1 & \mid \cdot a \\ \wedge & b\cdot x & + & a\cdot y & = & 0 & \mid \cdot b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} & \left(a^2 - b^2\right)\cdot x & = a \\ \wedge & \left(a^2 - b^2\right)\cdot y & = -b \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ x = \frac{a}{a^2 - b^2} \quad \wedge \quad y = \frac{-b}{a^2 - b^2} \right\}$$

$\Rightarrow$ Alle Punkte $(a;a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ besitzen kein inverses Element !
(Wenn im Nenner $a^2 + b^2$ stände, dann existierte für $(a;b) \neq (0;0)$ ein inverses Element.)

---

3. Ansatz: $(a;b)\cdot(x;y) := (a\cdot x - b\cdot y; b\cdot x + a\cdot y) = (1;0)$

Wegen des Assoziativgesetzes ist eine Subtraktion in der 2. Komponente nicht sinnvoll ![1]

$$\Rightarrow \left\{ x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \wedge \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \right\}$$ ist invers zu $(a;b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus \{(0;0)\}$

Das Assoziativgesetz ist auch gültig !

---

[1] Nachrechnen !

Multiplikation in $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

Folgerungen:

(1) $(a;b) = a\cdot(1;0) + b\cdot(0;1) =: a\cdot 1 + b\cdot i$

(2) $(0;1)\cdot(0;1) = (-1;0)$

(3) a) Geometrische Deutung: Drehstreckung
b) Die Ordnungsrelation geht verloren, aber:

Der Abstand zum Ursprung ist noch charakteristisches Merkmal !

Also: **Übergang zu Polarkoordinaten !**

$$\left(r_1\cdot\cos(\varphi_1)\ \middle|\ r_1\cdot\sin(\varphi_1)\right)\cdot\left(r_2\cdot\cos(\varphi_2)\ \middle|\ r_2\cdot\sin(\varphi_2)\right)$$
$$= \left(r_1\cdot r_2\cdot\cos(\varphi_1+\varphi_2)\ \middle|\ r_1\cdot r_2\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

(Additionstheoreme)

(4) Der Potenzbegriff (Satz von Moivre) und der Wurzelbegriff sind völlig neu (über Polarkoordinaten) mit den entsprechenden Gesetzen zu definieren !

Beispiel: $\mathbf{i} := \sqrt{-1}$ führt mit dem Wurzelgesetz: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ zu:

$$-1 = \mathbf{i}^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Nachtrag zum Assoziativgesetz:

Versuch 1: $(a;b)\cdot(c;d) := (a\cdot c + b\cdot d\,;\,a\cdot d - b\cdot c)$

$$[\,(a;b)\cdot(c;d)\,]\cdot(e;f) = (ace+bde+adf-bcf;acf+bdf-ade+bce)$$
$$(a;b)\cdot[\,(c;d)\cdot(e;f)\,] = (ace+adf+bcf-bde;acf-ade-bce-bdf)$$

Versuch 2: $(a;b)\cdot(c;d) := (a\cdot c - b\cdot d\,;\,a\cdot d + b\cdot c)$

$$[\,(a;b)\cdot(c;d)\,]\cdot(e;f) = (ace-bde-adf-bcf;acf-bdf+ade+bce)$$
$$(a;b)\cdot[\,(c;d)\cdot(e;f)\,] = (ace-adf-bcf-bde;acf+ade+bce-bdf)$$