Approximation von Nullstellen mit Hilfe der Ableitung

Mit Tangenten geht es oft einfacher und schneller als mit Sehnen oder Sekanten

Gegeben ist die Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) := x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 3\cdot x + 2$

Man erkennt leicht, dass es durch die Dominanz des vierten Potenzterms (x^4) genügt, die Funktion über dem Intervall [-3 ; 3] zu betrachten, wenn Nullstellen, relative Extrema oder Wendepunkte bestimmt werden sollen. - Hier soll es im folgenden zunächst um die Nullstellen von **f** gehen.

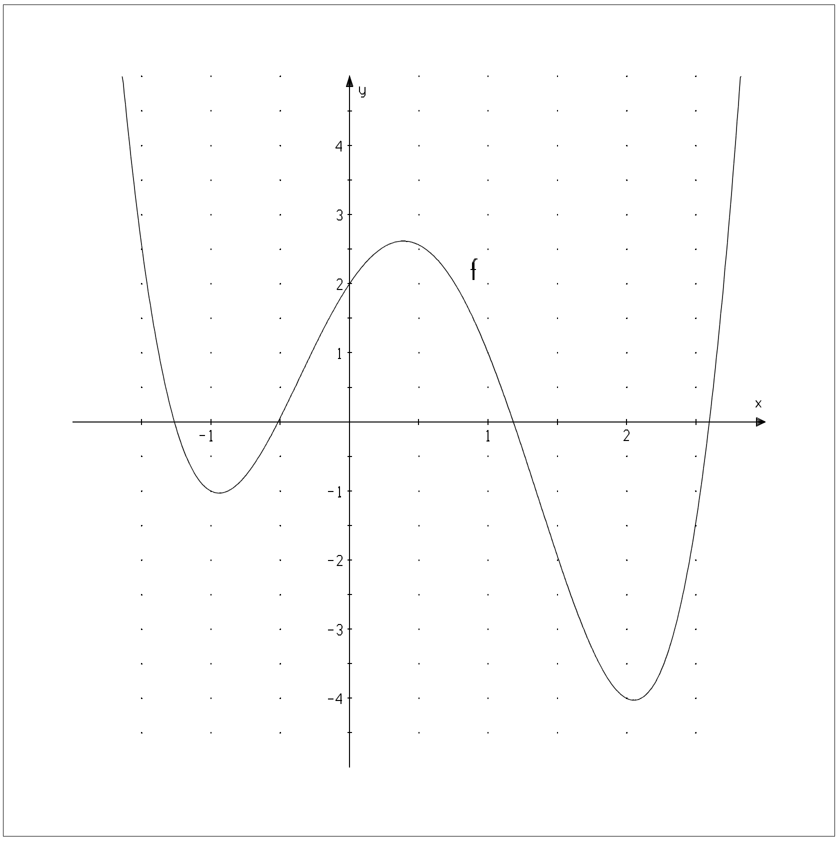
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	101	16	-1	2	1	-4	11

Die obige kurze Wertetabelle für ganzzahlige Stellen aus dem betrachteten Intervall zeigt, dass Nullstellen in den Teilintervallen [-2 ; -1], [-1 ; 0], [1 ; 2] und [2 ; 3] liegen müssen. (Begründung?)

....

Für das Verfahren der (verallgemeinerten) Regula Falsi benötigten wir stets zwei Punkte des Graphen, um **f** graphisch über Teilintervallen durch eine Sehne oder eine Sekante annähern zu können. Wir erinnern uns, dass damit der zugehörige Iterationsterm $x_{n+2} = x_{n+1} - \dfrac{f(x_{n+1}) \cdot (x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$ des Sekantenverfahrens etwas ‘unhandlich’ war, und bei dem Sehnenverfahren war von Schritt zu Schritt auch noch eine Entscheidung zu fällen, welche bisherige Teilintervallgrenze auf Grund der Vorzeichen der Funktionswerte für den folgenden Schritt beibehalten werden sollte.

Was bedeutet es eigentlich, wenn bei dem Sekantenverfahren zufällig die Funktionswerte an den Stellen x_n und x_{n+1} gleich sind? - Warum konnte dies bei dem Sehnenverfahren nicht passieren?



Sir Isaac **Newton**[1] wird die Idee zugeschrieben, den Graphen von **f** zur Nullstellenbestimmung durch Tangenten zu approximieren. Das (einfache)

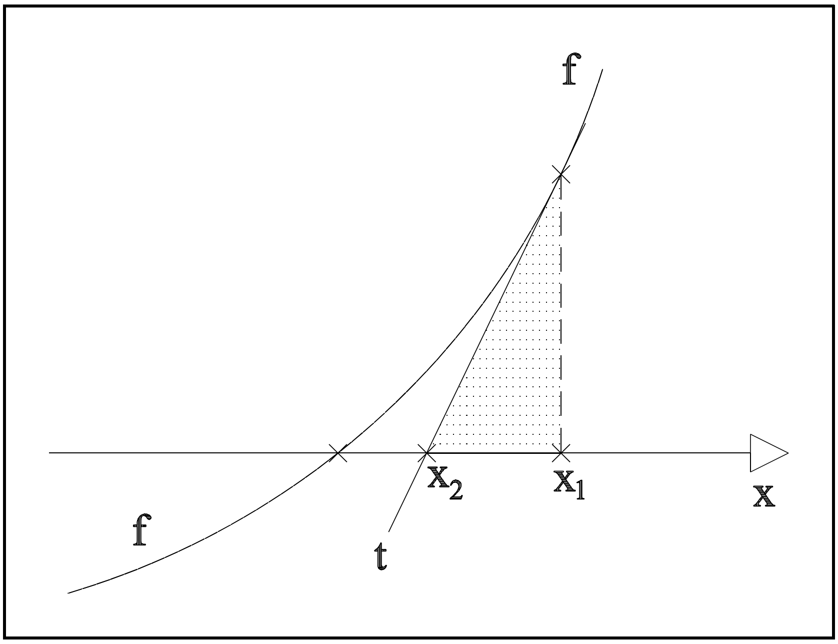
[1] ✳ 04. 01. 1643 in Woolsthorpe, Lincolnshire, † 31. 03. 1727 in London, England

Approximation von Nullstellen mit Hilfe der Ableitung

Mit Tangenten geht es oft einfacher und schneller als mit Sehnen oder Sekanten

Newton-Verfahren heißt demgemäß auch Tangentenverfahren. Der Vorzug gegenüber der Regula Falsi besteht darin, dass man nur einen Punkt des Graphen von **f** zur rechnerischen Durchführung benötigt.

Wir bestimmen nun die Nullstelle x_2 der Tangente an den Graphen von **f** im Punkt (x_1 | $\mathbf{f}(x_1)$). Aus der Prinzipskizze wird ersichtlich, dass die Steigung der Tangente einerseits $\mathbf{f}'(x_1)$ ist, andererseits läßt sich die Steigung durch das gekennzeichnete Steigungsdreieck berechnen.



Zeige, dass daraus folgt:

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{\mathbf{f}(x_1)}{\mathbf{f}'(x_1)}}$$

Allgemeine Iteration ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{\mathbf{f}(x_n)}{\mathbf{f}'(x_n)}}$$

Selbstverständlich muss gelten: Für alle $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{f}'(x_n) \neq 0$. - Warum?

Schreibt man die Iterationsvorschrift der verallgemeinerten Regula Falsi:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{(x_{n+1} - x_n)}}$$

so wird noch einmal die dem Newton-Verfahren gemeinsame lineare Approximation durch Ersetzen der Tangentensteigung durch die Sekantensteigung offensichtlich.

<u>Aufgaben:</u>

a) Bestimme iterativ mit dem Newtonverfahren Näherungswerte für die vier Nullstellen der Funktion **f**. Achte auf die Wahl sinnvoller Anfangswerte. Zeichne dazu jeweils eine erste Tangente in die vorgegebene Graphik ein. Verwende möglichst ein Tabellenkalkulationsprogramm.

b) Überprüfe iterativ mit dem Newtonverfahren jeweils eine notwendige Bedingung für die Existenz der drei relativen Extrema, d.h. bestimme Näherungswerte für die Nullstellen von $\mathbf{f}'$.

c) Überprüfe iterativ mit dem Newtonverfahren jeweils eine notwendige Bedingung für die Existenz der zwei Wendepunkte, d.h. bestimme Näherungswerte für die Nullstellen von $\mathbf{f}''$. Vergleiche mit den exakt berechneten Werten.

Approximation von Nullstellen mit Hilfe der Ableitung

Mit Tangenten geht es oft einfacher und schneller als mit Sehnen oder Sekanten

n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	2,800000	0,164699
2	2,635301	0,037303
3	2,597998	0,001839
4	2,596159	0,000004
5	2,596155	0,000000

n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	-1,500000	-0,170833
2	-1,329167	-0,058778
3	-1,270389	-0,007207
4	-1,263182	-0,000105
5	-1,263077	0,000000

n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	-0,500000	0,015625
2	-0,515625	0,000097
3	-0,515722	0,000000
4	-0,515722	0,000000
5	-0,515722	0,000000

n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1,500000	0,322917
2	1,177083	-0,005570
3	1,182653	0,000009
4	1,182644	0,000000
5	1,182644	0,000000

---

n	x_n	$\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$
1	-1,000000	-0,055556
2	-0,944444	-0,003421
3	-0,941023	-0,000013
4	-0,941010	0,000000
5	-0,941010	0,000000

n	x_n	$\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$
1	0,500000	0,111111
2	0,388889	0,000620
3	0,388269	0,000000
4	0,388269	0,000000
5	0,388269	0,000000

n	x_n	$\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$
1	2,000000	-0,055556
2	2,055556	0,002807
3	2,052749	0,000007
4	2,052741	0,000000
5	2,052741	0,000000

Approximation von Nullstellen mit Hilfe der Ableitung

Mit Tangenten geht es oft einfacher und schneller als mit Sehnen oder Sekanten

n	x_n	$\frac{f''(x_n)}{f'''(x_n)}$
1	-1,000000	-0,500000
2	-0,500000	-0,125000
3	-0,375000	-0,008929
4	-0,366071	-0,000046
5	-0,366025	0,000000

n	x_n	$\frac{f''(x_n)}{f'''(x_n)}$
1	1,000000	-0,500000
2	1,500000	0,125000
3	1,375000	0,008929
4	1,366071	0,000046
5	1,366025	0,000000

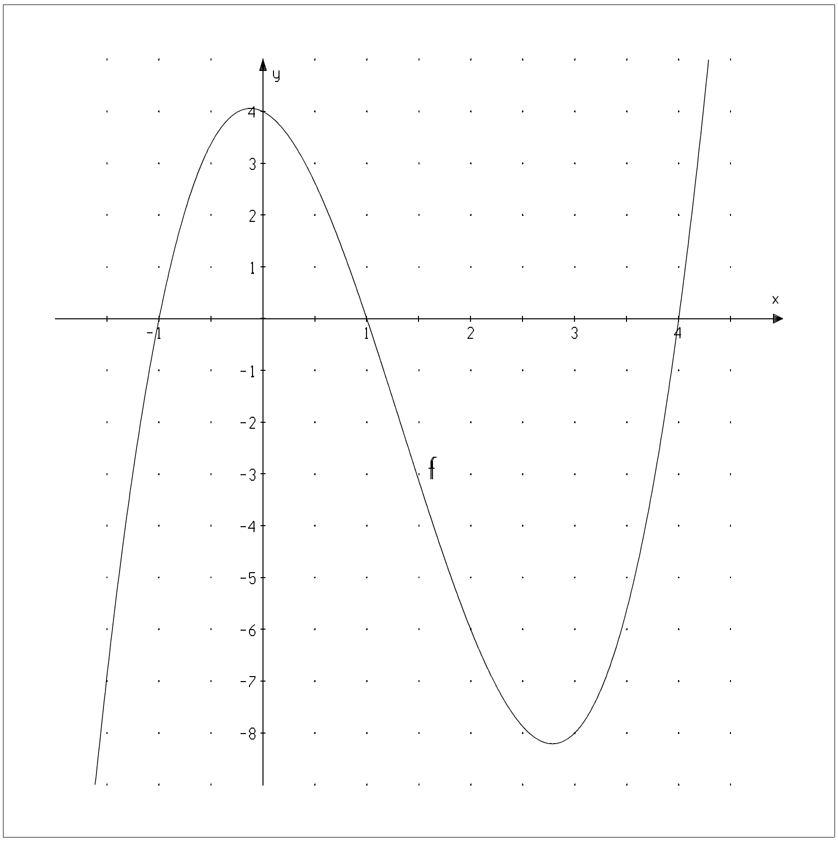
Wenn der Anfangswert hinreichend gut gewählt ist, dann konvergiert das Newtonverfahren i.a. sehr gut und man erhält mit jedem Schritt zwei geltende Ziffern dazu.

Dennoch kann es zuweilen problematisch sein und was heißt eigentlich ‘hinreichend gut gewählter Anfangswert’?

Als Beispiel wird nun die Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) := x^3 - 4\cdot x^2 - x + 4$ betrachtet.

<u>Aufgabe:</u>

Zeichne an der Stelle $x_1 := 0{,}1$ eine Tangente an Graph **f** in die nebenstehende Graphik ein und führe <u>graphisch</u> zwei Iterationsschritte des Newtonverfahrens durch.



Es kann passieren, dass sich die Iteration ‘im Kreise dreht’ oder man an einer ganz anderen Stelle landet, als man beabsichtigt hat. Insbesondere sind Stellen größerer Krümmung des Graphen von **f** für das Newtonverfahren wenig geeignet; man approximiert ja durch eine lineare Funktion.

n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0,094000	-2,243700
2	2,337700	2,244251
3	0,093450	-2,249588
4	2,343037	2,271713
5	0,071324	-2,513091

Approximation von Nullstellen mit Hilfe der Ableitung

Mit Tangenten geht es oft einfacher und schneller als mit Sehnen oder Sekanten

Die Iterationsvorschrift des einfachen Newtonverfahrens: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\mathbf{f}(x_n)}{\mathbf{f}'(x_n)}$ kann man auch interpretieren als Schnittpunktsproblematik der Identität mit einer Iterationsfunktion φ, wie wir es z.B. in Klassenstufe 9 beim Verfahren von Heron zum ersten Mal kennen gelernt haben. Das würde hier bedeuten, dass zur Iterationsfunktion φ die Funktionsgleichung $\varphi(x) := x - \dfrac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{f}'(x)}$ gehört und die Iterationsvorschrift, wie üblich, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ lautet.

Bekanntlich konvergiert ein allgemeines Iterationsverfahren dann besonders gut, wenn der Betrag der Steigung der Iterationsfunktion in der Umgebung der Schnittstelle möglichst klein ist.

<u>Aufgabe:</u>

Bestätige, dass gilt: $$\left|\varphi'(x)\right| = \left|\frac{\mathbf{f}''(x)\cdot\mathbf{f}(x)}{\left(\mathbf{f}'(x)\right)^2}\right|$$

Damit ist ein Anfangswert genau dann gut gewählt, wenn der obige Bruch betragsmäßig klein ist, d.h. der Zähler ist möglichst klein, der Nenner möglichst groß!

Was bedeutet dies graphisch?

<u>Nachtrag:</u>

1) Gegenüber dem einfachen Newton-Verfahren verzichtet man bei dem <u>vereinfachten</u> Newton-Verfahren auf die fortlaufend neue Berechnung der Tangentensteigung. Man setzt $m := \mathbf{f}'(x_1)$ und iteriert

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{\mathbf{f}(x_n)}{m}}\ .$$

Graphische Konsequenzen?

2) Bei dem <u>verbesserten</u> Newton-Verfahren berücksichtigt man auch noch das Krümmungsverhalten, indem man nicht linear, sondern durch einen Parabelbogen approximiert.[2]

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{\mathbf{f}(x_n)\cdot\left(1 + \dfrac{\mathbf{f}(x_n)\cdot\mathbf{f}''(x_n)}{2\cdot(\mathbf{f}'(x_n))^2}\right)}{\mathbf{f}'(x_n)}}$$

Die i.a. erhöhte Konvergenzgeschwindigkeit erfordert einen deutlich größeren Rechenaufwand. Für unsere Zwecke genügt die lineare Approximation durch Tangenten des einfachen Newton-Verfahrens.

---

[2] Für die Parabel **p** und die Funktion **f** soll gelten: $\mathbf{p}(x_n) = \mathbf{f}(x_n) \ \wedge\ \mathbf{p}'(x_n) = \mathbf{f}'(x_n) \ \wedge\ \mathbf{p}''(x_n) = \mathbf{f}''(x_n)$