Notwendig:

a) Um mit dem BVG-Bus fahren zu können, **muß** ich mich zur Haltestelle begeben.
b) Es ist **notwendig**, sich zur Haltestelle zu begeben, wenn....
c) Wenn ich **nicht** zur Haltestelle gehe, werde ich **sicher nicht** mit dem Bus fahren können.
d) Wenn ich zur Haltestelle gehe, werde ich aber nicht sicher sein, daß ich auch Bus fahren kann. Vielleicht wird gerade gestreikt oder ...

---

a) Um an der Stelle x_E ein relatives Extremum einer Polynomfunktion zu haben, **muß** dort eine waagerechte Tangente sein.
b) Es ist **notwendig,** daß $f\,'(x_E) = 0$ gilt, wenn an der Stelle x_E ein relatives ....
c) Wenn **nicht** $f\,'(x_E) = 0$ gilt, wird an dieser Stelle **sicherlich kein** relatives Extremum liegen.
d) Wenn $f\,'(x_E) = 0$ gilt, kann ich nicht sicher sein, daß der Graph von f dort ein rel. Extr. hat, denn vielleicht lautet die Funktionsgleichung $f(x) = x^3$ oder ....

Hinreichend:

a) Wenn ich 10 000.- verdiene, kann ich sicher sein, meine Miete bezahlen zu können.
b) Es reicht aus, 10 000.- zu verdienen, um....
Es ist **hinreichend**, 10 000.- zu verdienen, damit ich meine Miete ....
c) Ich **muß** aber nicht unbedingt 10 000.- verdienen, mir würden auch 9 500.- genügen.
Es ist also **nicht notwendig**, daß ich 10 000.- verdiene, um meine Miete bezahlen zu können.
d) Wenn ich aber 10 000.- verdiene, bin ich **absolut sicher** , daß ich meine Miete....

---

a) Wenn $f\,'(x_E) = 0$ und $f\,''(x_E) > 0$ gilt, kann ich sicher sein, daß f an der Stelle x_E ein relatives Minimum hat.
b) Es reicht aus zu wissen, daß $f\,'(x_E) = 0$ und $f\,''(x_E)>0$ gilt, um sicher zu sein, daß... Es ist **hinreichend** zu wissen, daß $\mathbf{f\,'(x_E) = 0}$ **und** $\mathbf{f\,''(x_E) > 0}$ gilt, um sagen zu können, daß f an der Stelle x_E ein relatives Minimum hat.
c) Es **muß** aber nicht unbedingt $f\,'(x_E) = 0$ und $f\,''(x_E) > 0$ gelten, damit ich sicher bin,....
Diese Bedingung ist **nicht notwendig:**
Die Funktion f könnte ja durch $f(x) = x^4$ definiert sein.
d) Wenn aber $\mathbf{f\,'(x_E) = 0}$ **und** $\mathbf{f\,''(x_E) > 0}$ gilt, bin ich **absolut sicher**, daß an der Stelle x_E ein relatives Extremum liegt.
Beweis:
Aus $f\,''(x_E) > 0$ folgt, daß $f\,'$ in einem ganzen Intervall, das den Wert x_E enthält, streng monoton steigt. (Die Werte von $f\,''$ geben die Steigung von $f\,'$ an!!!) **Monotoniesatz!**
Hinweis: Wir haben zwar nur vorausgesetzt, daß $f\,''$ an einer Stelle positiv ist, doch für die Funktionen, die wir hier betrachten, läßt sich zeigen (auf diesen Beweis verzichten wir, weil er etwas kompliziert ist) , daß für alle Werte x , die "etwas" kleiner und alle Werte x, die "etwas" größer als x_E sind, $f\,''(x)$ auch noch positiv sein muß.
Da $f\,'(x_E) = 0$ vorausgesetzt war, muß also $f\,'(x)$ links von x_E negativ und rechts von x_E positiv sein. (Vorzeichenwechsel von $f\,'$!) Damit muß der Graph von f links von x_E fallen und rechts von x_E steigen. Damit bleibt dem Graphen nichts anderes übrig, als an der Stelle x_E ein relatives Minimum zu haben. ■
