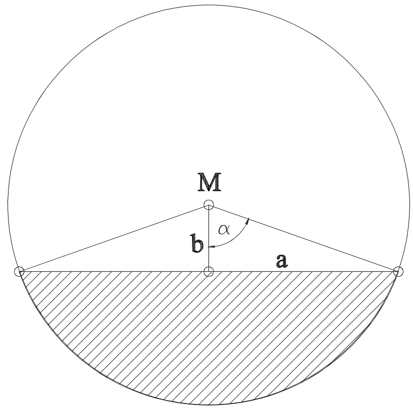
Lösung einer transzendenten Gleichung
Die Regula Falsi kann nützlich sein

Gegeben ist ein zylindrisches, liegendes Ölfaß mit einem Fassungsvermögen $\mathbf{V_Z}$ = 3000 l und einer zylindrischen Höhe $\mathbf{h_Z}$ = 2 m. Die Skizze rechts zeigt die vordere, kreisförmige Querschnittsfläche.
Oben, in der „Mitte“ der Tonne befindet sich ein Spundloch, das die Füllung bzw Entnahme von Öl ermöglicht.



<u>Aufgabe:</u> Führt man einen linearen Stab, senkrecht bis zum Boden der Tonne, durch das Spundloch ein, so soll an der Höhe der Benetzung durch Öl ablesbar sein, wie viel Öl sich in dem Faß befindet! - Erstelle eine geeignete Tabelle, die den Zusammenhang: Momentanes Volumen in Abhängigkeit von der Höhe der Benetzung wiedergibt.

Wir behandeln die Aufgabe zunächst für den Spezialfall, dass sich in dem Faß **1200 l** Öl befinden. - Als Variable soll der in der Skizze eingezeichnete Zentriwinkel **α** fungieren.

1.) Bestätige, dass sich die vom Öl benetzte Querschnittsfläche **A** auf die folgenden 2 Weisen bestimmen läßt:[1]

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha\cdot\pi\cdot r^2}{180°} - r\cdot\cos(\alpha)\cdot r\cdot\sin(\alpha) \qquad\qquad \mathbf{A} = \frac{1200\ \text{l}}{2\ \text{m}} = \frac{3}{5}\ \text{m}^2$$

2.) Zeige, dass aus den gegebenen Maßzahlen folgt, dass sich für den Radius **r** ein Wert von $\mathbf{r} = \sqrt{\frac{3}{2\cdot\pi}}\ \text{m} \approx 0{,}69099\ \text{m}$ ergibt und dass die Höhe h vom Winkel α in folgender Weise funktional abhängt: $\mathbf{h}(\alpha) = r\cdot(1-\cos(\alpha))$.

3.) Gibt man die Größe von **α** im Bogenmaß **x** an, so ergibt sich aus den Teilen 1) und 2) folgende Bestimmungsgleichung für **x**:

$$\boxed{\sin(2\cdot x) = 2\cdot x - \frac{4}{5}\cdot\pi}$$

Finde eine vorläufige Lösung dieser Gleichung auf <u>graphischem</u> Wege durch eine Schnittpunktsbestimmung der zu den Termen der Seiten der Gleichung gehörenden Graphen. Überprüfe durch Probe die Güte deiner graphischen Lösung und bestimme mit diesem Wert die zugehörige Höhe **h**.

4.) Führe mit 2 geeigneten Anfangswerten 2 Schritte der verallgemeinerten Regula Falsi zur Bestimmung der Nullstelle von **f** mit $\mathbf{f}(x) = \sin(2\cdot x) - 2\cdot x + \frac{4}{5}\cdot\pi$ durch.

5.) Verteilt die Volumina von 200 l bis 1400 l (in 200 l Schritten) auf 6 Arbeitsgruppen, entwickelt die zugehörige Gleichung zur Bestimmung des Bogenmaßes x und berechnet die entsprechende Höhe h. - Fertigt eine Tabelle in 200 l - Schritten (inklusive der Höhe h für 1500 l) des Zusammenhangs: „Volumen - Höhe“ an!

---

[1] Wir rechnen in Gleichungen nur mit Maßzahlen!

<u>Verallgemeinerte</u> Regula Falsi mit: $\mathbf{f}(x) = \mathbf{sin}(x)\cdot\mathbf{cos}(x) - x + \frac{2\cdot\pi}{5}.$

n	x_n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	x_{n+2}
1	1,30000	1,40000	0,21439	0,02413	1,41268
2	1,40000	1,41268	0,02413	-0,00056	1,41240
3	1,41268	1,41240	-0,00056	0,00000	1,41240
4	1,41240	1,41240	0,00000	0,00000	1,41240
5	1,41240	1,41240	0,00000	0,00000	1,41240

Zur Ölfaßaufgabe:

V [l]	x	α [°]	h [m]
200	0,70260	40,26	0,16365
400	0,90471	51,84	0,26402
600	1,05657	60,54	0,35112
800	1,18581	67,94	0,43149
1000	1,30266	74,64	0,50792
1200	1,41240	80,92	0,58200
1400	1,51839	87,00	0,65479
1500	1,57080	90,00	0,69099
1600	1,62320	93,00	0,72718
1800	1,72919	99,08	0,79998
2000	1,83893	105,36	0,87405
2200	1,95578	112,06	0,95048
2400	2,08502	119,46	1,03086
2600	2,23688	128,16	1,11796
2800	2,43899	139,74	1,21832
3000	3,14160	180,00	1,38198

<u>Bestimmende Maße:</u> Senkrechter Zylinder mit $V_Z = 3000\ l = 3\ m^3$ und Höhe $h_Z = 2$ m.

Zur Berechnung der Werte für **x** wird in der obigen Funktionsgleichung nur das absolute Glied verändert!

1. Beispiel: $\frac{V}{h_z}\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \frac{1{,}2}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \frac{2\cdot\pi}{5}$ für $V = 1{,}2\ m^3$,

2. Beispiel: $\frac{V}{h_z}\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \frac{2{,}0}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \frac{2\cdot\pi}{3}$ für $V = 2{,}0\ m^3$!