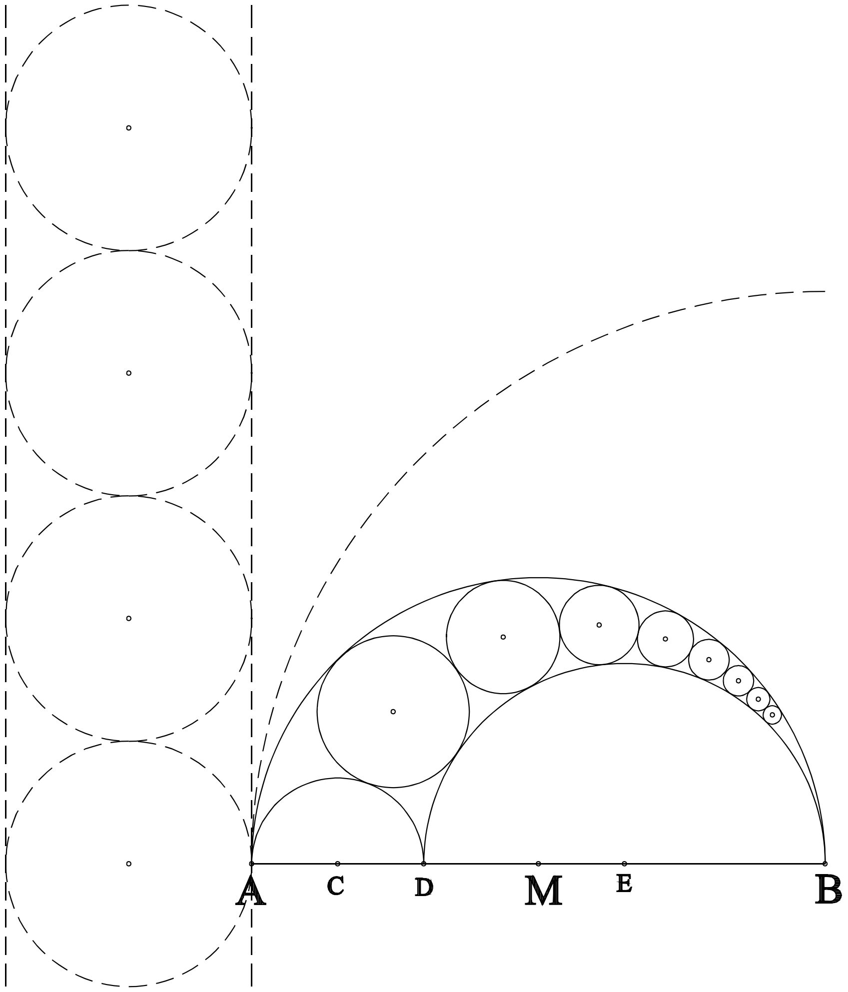
# Inversion (Spiegelung) am Kreis

**Die Pappus-Kette, ... oder: Ein Kreis kommt selten allein!**

In der Klassenstufe 9 haben wir bei der Berechnung der Größe von Kreisflächen (oder Teilen davon) das Schustermesser des Archimedes (Arbelos) kennen gelernt, das aus 3 Halbkreisen besteht (Mittelpunkte **M**, **C** und **E**) und in Klassenstufe 10 haben wir uns mit dem Berührkreisproblem des Apollonius beschäftigt.

Fasst man nun den Kreis um den Punkt **B** mit dem Radius $\mathbf{r} = \overline{AB}$ als Inversionskreis $\mathbf{k_i}$ auf, so ist das Bild des Kreises $\mathbf{k}\left(M\,;r=\overline{AM}\right)$ eine zu AB senkrechte Gerade **g** durch **A**, das Bild des Kreises $\mathbf{k}\left(E\,;r=\overline{EB}\right)$ eine zu **g** parallele Gerade durch **D'**, und das Bild des Kreises $\mathbf{k_0}\left(C\,;r=\overline{AC}\right)$ ist ein Kreis $\mathbf{k_0}$**'**, der auch durch **A** verläuft.



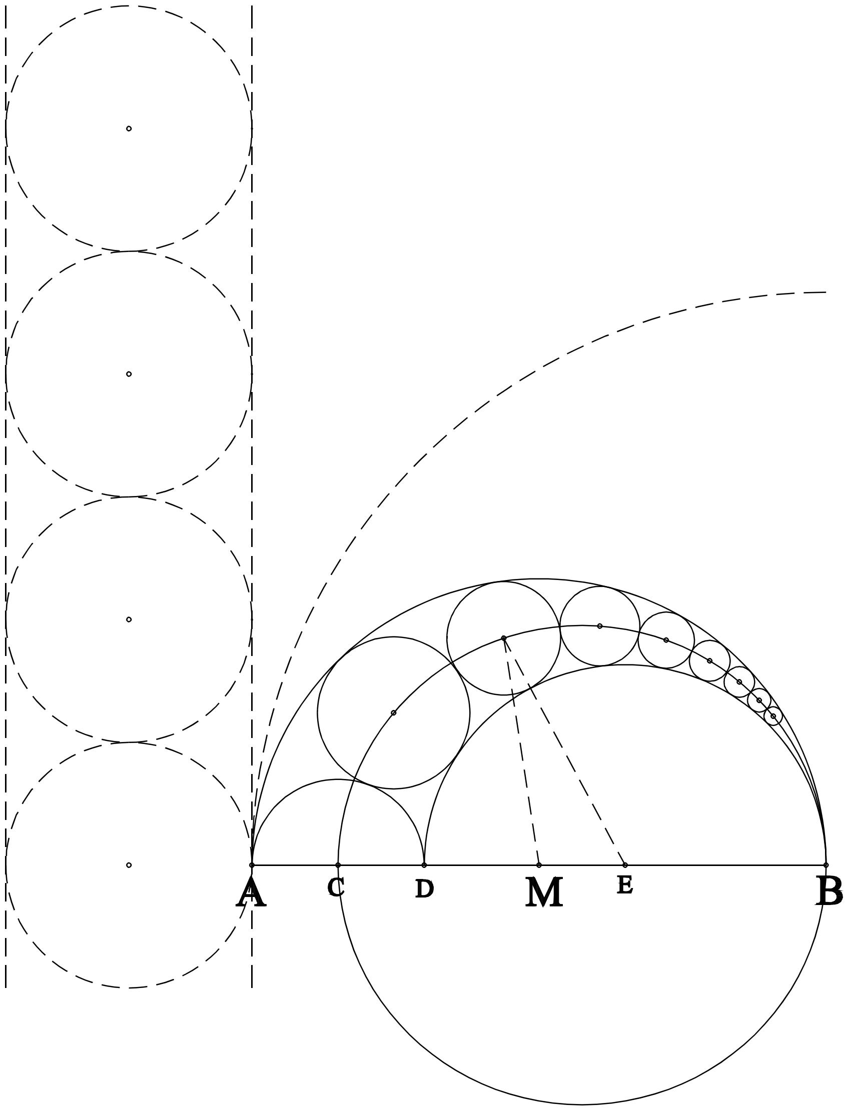

Setzt man nun an $\mathbf{k_0}$**'** entlang **g** weitere Kreise gleicher Radiusgröße und invertiert diese Kreise an $\mathbf{k_i}$, so entsteht im Inneren von **k** eine Folge von immer kleineren Kreisen, die sogenannte **Pappus-Kette**.[1]

Aufgabe 1: Wähle $\overline{AC} = 1{,}5\,\text{cm}$, $\overline{EB} = 3{,}5\,\text{cm}$ und konstruiere mindestens 4 Kreise der Pappus-Kette. Versuche mit möglichst wenigen Hilfslinien auszukommen. Beachte: Die Mittelpunkte der Kreise sind nicht invers zueinander; verwende geeignet Berührpunkteigenschaften.

..........................................................................................................................................................................

[1] Informiere Dich durch Literaturrecherche oder im Internet über **Pappus** von Alexandria.

Aufgabe 2: Beweise: Für jeden Mittelpunkt eines Kreises der Pappuskette gilt, dass die Summe der Abstände zu den Halbkreismittelpunkten **M** und **E** konstant ist, womit alle Mittelpunkte auf einer Ellipse liegen. - Versuche eine Ellipsengleichung zu bestimmen.



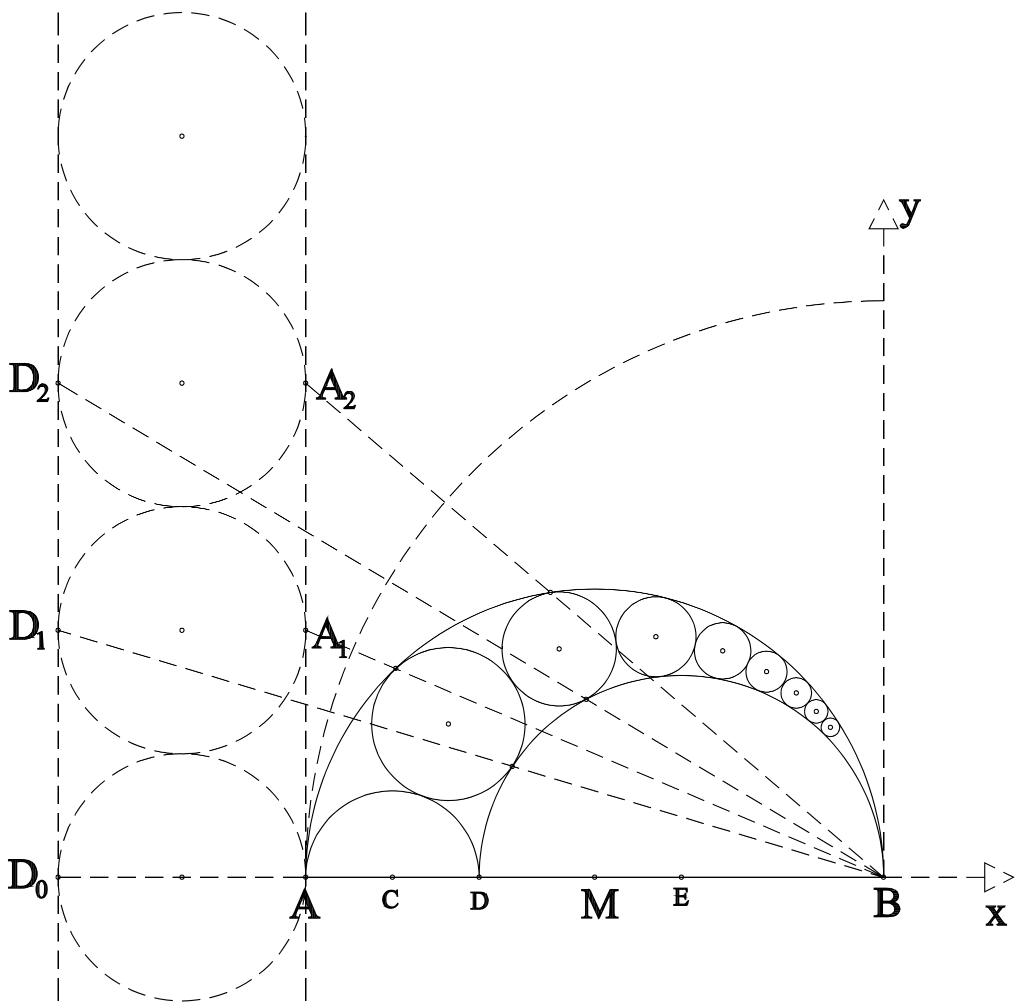

Offensichtlich gilt, wenn **z** der Radius und $\mathbf{M_z}$ der Mittelpunkt eines Pappuskreises ist:

$\overline{MM_z} + \overline{M_zE} =$

Ellipsengleichung:

Im folgenden soll ein wenig gerechnet werden. Dazu führen wir ein Koordinatensystem ein (Skizze auf der folgenden Seite).

Wir nehmen als Ursprung unseres Koordinatensystems den Punkt **B**, den Mittelpunkt des Inversionskreises, und bezeichnen den Radius des kleinen inneren Halbkreises des Arbelos mit **r**, den Radius des großen inneren Halbkreises mit **R**, womit für den Radius $\mathbf{R_i}$ des Inversionskreises gilt: $\mathbf{R_i} = 2 \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{r})$.




Aufgabe 3: Bestätige, dass für den Radius $\mathbf{r_k}$ der gestrichelt gezeichneten Kreise zwischen den Parallelen gilt:

$$\mathbf{r_k} = \frac{r\cdot(R+r)}{R} \,.$$

Bezeichne die inversen Bilder der Punkte $\mathbf{A_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) geeignet, und bestätige, dass die zugehörigen Koordinaten lauten:

$$\mathbf{A_n'}\left( \frac{R^2}{R^2 + n^2\cdot r^2} \cdot (-2\cdot(R+r)) \;\middle|\; \frac{R^2}{R^2 + n^2\cdot r^2} \cdot 2\cdot n\cdot r_k \right)$$

Bezeichne die inversen Bilder der Punkte $\mathbf{D_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) geeignet, und bestätige, dass die zugehörigen Koordinaten lauten:

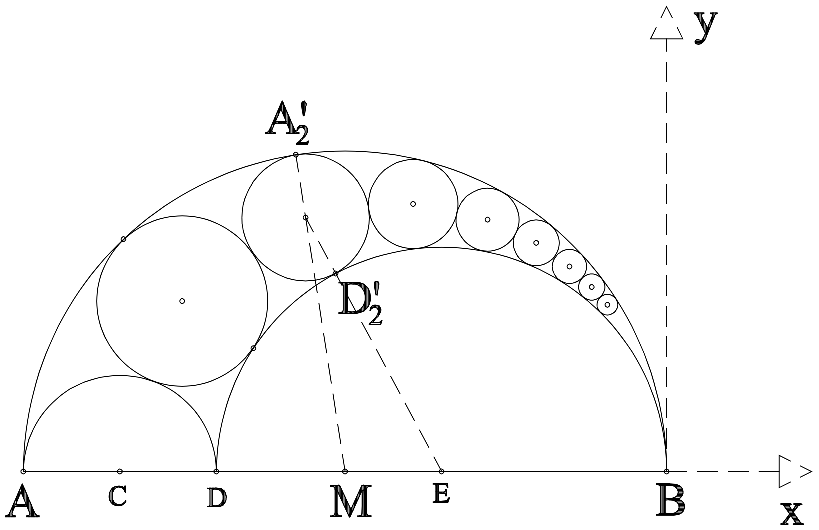
$$\mathbf{D_n'}\left( \frac{R^2}{(R+r)^2 + n^2\cdot r^2} \cdot \left( -2\cdot\frac{(R+r)^2}{R} \right) \;\middle|\; \frac{R^2}{(R+r)^2 + n^2\cdot r^2} \cdot 2\cdot n\cdot r_k \right)$$

.............................................................................................................................................

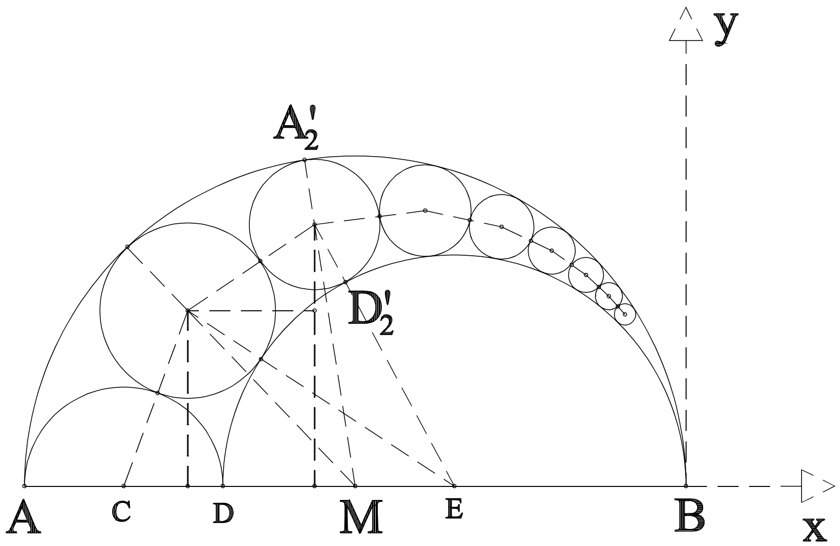
## Inversion (Spiegelung) am Kreis

**Die Pappus-Kette, ... oder: Ein Kreis kommt selten allein!**

Aufgabe 4: Zeichne ein Schustermesser des Archimedes (nicht zu klein, z.B. mit **r** = 3 cm und **R** = 7 cm, Heftblatt quer!) und wähle gemäß den vorherigen Bezeichnungen den Punkt **B** als Ursprung eines Koordinatensystems.
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte $A_n$‘ und $D_n$‘ von mindestens 4 Pappuskreisen und kennzeichne diese Punkte in der Graphik.
Verwende nun die Mittelpunkte M und E geeignet, um die Mittelpunkte der Pappuskreise zu bestimmen und diese Kreise zu konstruieren.




Für Interessierte (mit Kondition):
Versuche, rechnerisch die Mittelpunktskoordinaten und den Radius eines Pappuskreises in Abhängigkeit von **r**, **R** und **n** ($n \in \mathbb{N}$) zu bestimmen.[2]




Quelle: Jürgen Köller: http://www.mathematische-basteleien.de

[2] Eventuell über Geradengleichungen (g(M;A‘) und g(E;D‘) - Schnittpunktsbestimmung) oder induktive Verwendung von Berührpunkteigenschaften (siehe Skizze mit Hilfslinien - nichtlineare Gleichungssysteme über Satz des Pythagoras)

# Inversion (Spiegelung) am Kreis

**Die Pappus-Kette, ... oder: Ein Kreis kommt selten allein!**

Lösungsskizze zur rechnerischen Bestimmung der Mittelpunktskoordinaten und des Radius eines Pappuskreises (hier der Weg über die Schnittpunktsbestimmung zweier Geraden):

$$\mathbf{g}(M;A_n') \ : \ y = \frac{2 \cdot n \cdot r \cdot R}{n^2 \cdot r^2 - R^2} \cdot (x + (r+R)) \ ; \qquad n \cdot r \neq R$$

$$\mathbf{g}(E;D_n') \ : \ y = \frac{2 \cdot n \cdot r \cdot (R+r)}{n^2 \cdot r^2 - (R+r)^2} \cdot (x + R) \ ; \qquad n \cdot r \neq R+r$$

Die x - Koordinate des Schnittpunkts der Geraden (Mittelpunkt eines Pappuskreises) lautet:

$$\mathbf{x_S} = -\frac{3 \cdot R^2 \cdot r + r^2 \cdot R + 2 \cdot R^3}{n^2 \cdot r^2 + R \cdot r + R^2}$$

Einsetzen in die erste Geradengleichung ergibt (ohne algebraische Vereinfachung):

$$\mathbf{y_S} = \frac{2 \cdot n \cdot r \cdot R}{n^2 \cdot r^2 - R^2} \cdot \left( r+R - \frac{3 \cdot R^2 \cdot r + r^2 \cdot R + 2 \cdot R^3}{n^2 \cdot r^2 + R \cdot r + R^2} \right)$$

Den Radius eines Pappuskreises erhält man nun selbstverständlich über die Abstandsbestimmung des Mittelpunktes von $A_n$‘ oder $D_n$‘ (Satz des Pythagoras).

| | |
|---|---|
| **R =** | 7 |
| **r =** | 3 |

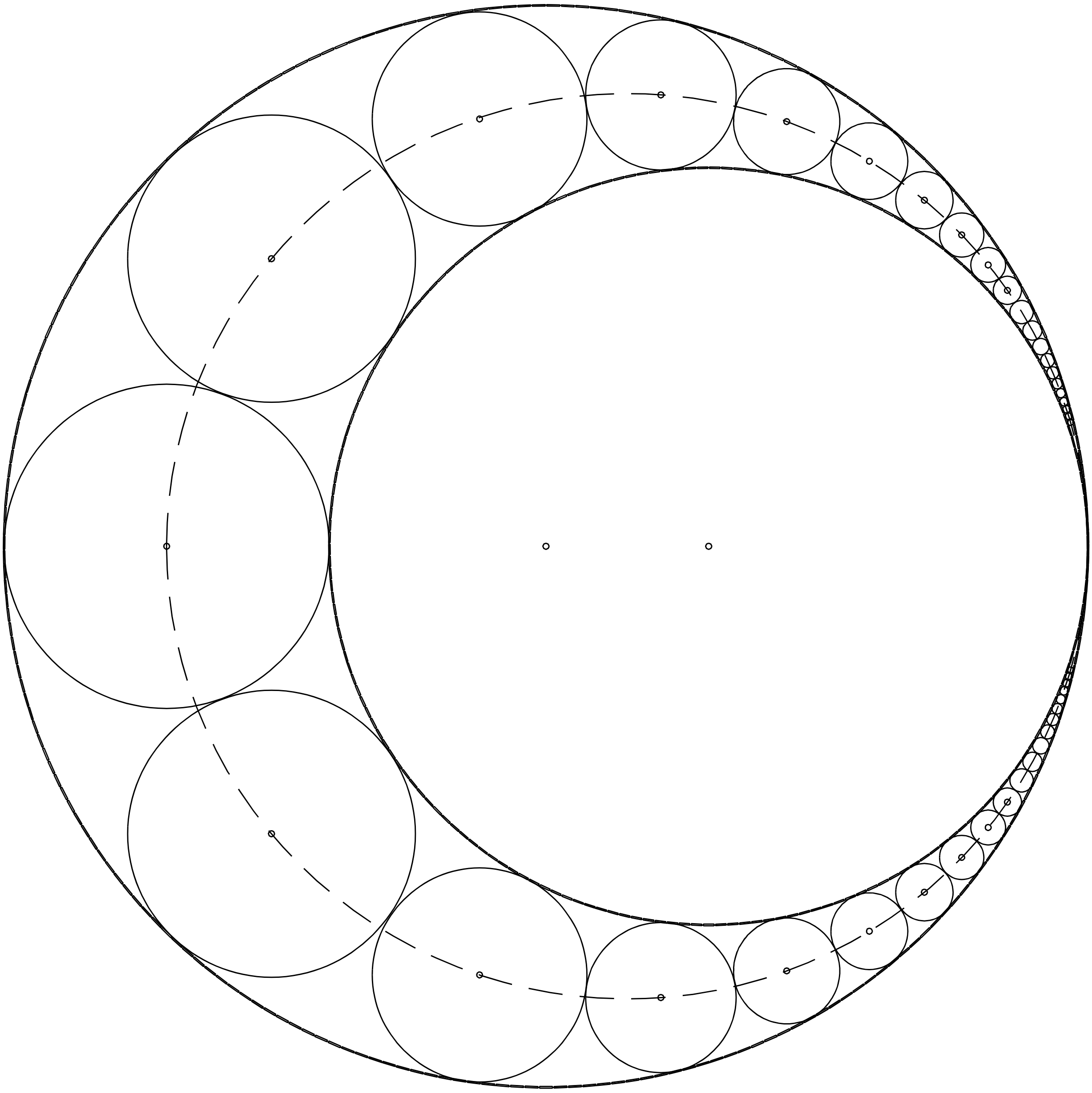
Hier bietet sich natürlich der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms an. - Vergleiche mit deiner Skizze. - Erstelle selbst eine geeignete Kalkulation mit Eingabefeldern für **R** und **r**.

| n | $x_S$ | $y_S$ | $x_{A'}$ | $y_{A'}$ | $x_{D'}$ | $y_{D'}$ | $r_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -17,0000 | 0,0000 | -20,0000 | 0,0000 | -14,0000 | 0,0000 | 3,0000 |
| 1 | -15,0633 | 5,3165 | -16,8966 | 7,2414 | -12,8440 | 3,8532 | 2,6582 |
| 2 | -11,2264 | 7,9245 | -11,5294 | 9,8824 | -10,2941 | 6,1765 | 1,9811 |
| 3 | -7,8808 | 8,3444 | -7,5385 | 9,6923 | -7,7348 | 6,9613 | 1,3907 |
| 4 | -5,5607 | 7,8505 | -5,0777 | 8,7047 | -5,7377 | 6,8852 | 0,9813 |
| 5 | -4,0339 | 7,1186 | -3,5766 | 7,6642 | -4,3077 | 6,4615 | 0,7119 |
| 6 | -3,0203 | 6,3959 | -2,6273 | 6,7560 | -3,3019 | 5,9434 | 0,5330 |
| 7 | -2,3288 | 5,7534 | -2,0000 | 6,0000 | -2,5878 | 5,4344 | 0,4110 |
| 8 | -1,8421 | 5,2012 | -1,5680 | 5,3760 | -2,0710 | 4,9704 | 0,3251 |
| 9 | -1,4894 | 4,7309 | -1,2596 | 4,8586 | -1,6888 | 4,5597 | 0,2628 |
| 10 | -1,2268 | 4,3299 | -1,0327 | 4,4257 | -1,4000 | 4,2000 | 0,2165 |
| 11 | -1,0267 | 3,9862 | -0,8612 | 4,0598 | -1,1775 | 3,8856 | 0,1812 |
| 12 | -0,8712 | 3,6896 | -0,7286 | 3,7472 | -1,0029 | 3,6103 | 0,1537 |

# Inversion (Spiegelung) am Kreis

**Die Pappus-Kette, ... oder: Ein Kreis kommt selten allein!**

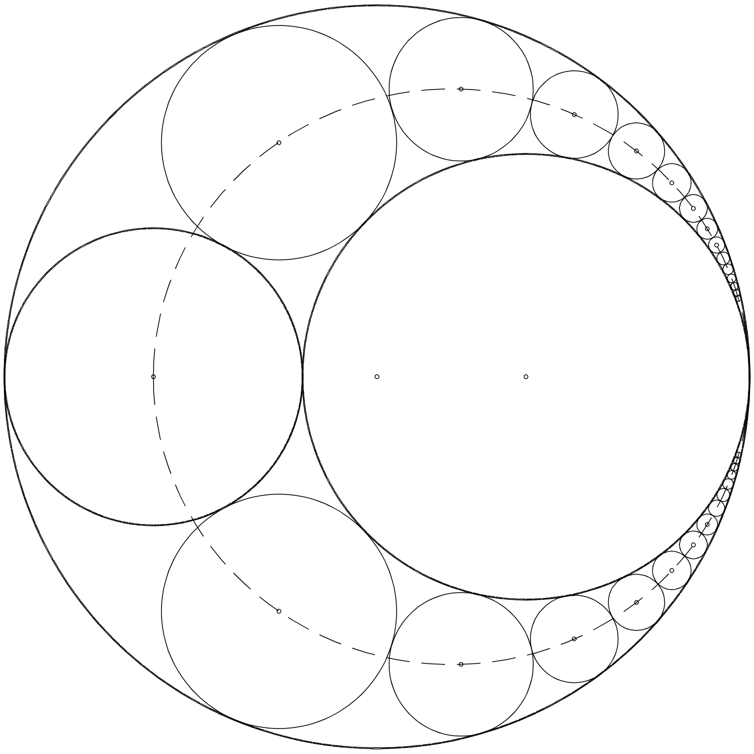
**R** = 7; **r** = 3:



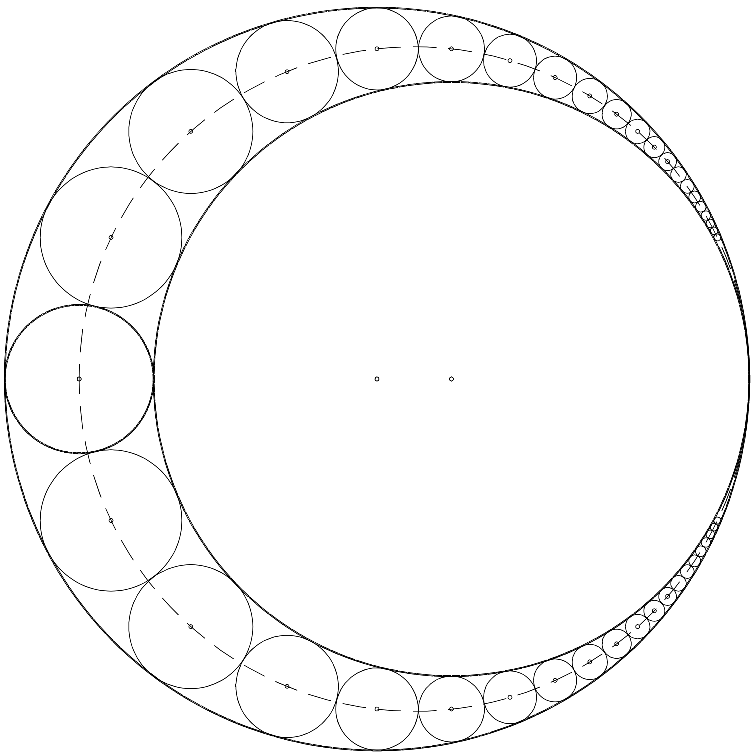
# Inversion (Spiegelung) am Kreis

**Die Pappus-Kette, ... oder: Ein Kreis kommt selten allein!**

**R** = 6; **r** = 4:



**R** = 8; **r** = 2:



Hinweis: Sollte bei der Berechnung von $\mathbf{y_S}$ und $\mathbf{r_n}$ ein Fehler auftauchen, weil die x-Koordinaten von **M** und **A'** gleich sind, dann die andere Geradengleichung (und **D'**) verwenden.