# Nullstellen ganzrationaler Funktionen

**Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich ! ... - Oder: Operationen kann man auch umkehren !**

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion **f** mit: $\mathbf{f}(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105$ .

a) Wichtigste mathematische Lösungsmöglichkeit: Scharf hinsehen! - Man findet leicht im positiv-ganzzahligen Bereich: $\mathbf{f}(3) = 0$ .

b) Der Funktionsterm $x^3 - 5 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105$ muß sich also faktorisieren lassen, d.h. es muß ein Polynom zweiten Grades $(x^2 + p \cdot x + q)$ geben, so dass gilt: $x^3 - 5 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105 = (x^2 + p \cdot x + q) \cdot (x - 3)$. Beweis? Das Polynom 2. Grades suchen wir jetzt. Wir erinnern uns dabei an das Rechnen mit Bruchtermen. Bei gleichem Nennerterm (Hauptnenner) konnte man 2 Bruchterme zusammenfassen. Diese Operation machen wir nun rückwärts und zwar so, dass im ersten Teilbruchterm faktorisiert und gekürzt werden kann!

$$\frac{x^3 - 5 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105}{x - 3} =$$

(1) $$\frac{x^2 \cdot (x - 3) + 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105}{x - 3} =$$

(2) $$x^2 + \frac{-2 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105}{x - 3} =$$

(3) $$x^2 + \frac{-2 \cdot x \cdot (x - 3) - 6 \cdot x - 29 \cdot x + 105}{x - 3} =$$

(4) $$x^2 - 2 \cdot x + \frac{-35 \cdot x + 105}{x - 3} =$$

$$x^2 - 2 \cdot x + \frac{-35 \cdot (x - 3)}{x - 3} =$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 35$$

Wenn **f** weitere Nullstellen hat, ergeben sich diese aus der quadratischen Gleichung: $x^2 - 2 \cdot x - 35 = 0$ , weil ein Produkt dann und nur dann den Wert Null hat, wenn einer der Faktoren Null ist.

c) Bestätige durch Lösen der quadratischen Gleichung, dass gilt: $x^2 - 2 \cdot x - 35 = (x - 7) \cdot (x + 5)$ .

---

$\mathbf{f}(x)$ lässt sich damit vollständig in **Linearfaktoren** zerlegen:

$$\mathbf{f}(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 - 29 \cdot x + 105 = (x - 3) \cdot (x - 7) \cdot (x + 5)$$

---

Fragen: Was wurde in (1) geliehen und zurückgegeben?
Welche Rechenschritte führen von (1) zu (2) ?
Wie erhält man (3) aus (2) ?
Wie erhält man (4) aus (3) ?
Was passiert, wenn man f(x) statt durch (x - 3) durch (x - 4) teilt ?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Nullstellen und 105 ?

# Nullstellen ganzrationaler Funktionen

**Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich ! ... - Oder: Operationen kann man auch umkehren !**

Als weiteres Beispiel sei die Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) = 2\cdot x^3 - 7\cdot x^2 - 5\cdot x + 4$ gegeben. Begründe, dass der Funktionsterm durch das Monom (x + 1) ohne Rest teilbar sein muss.

Die Rechnung (in verkürzter Schreibweise):

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-7x^2-5x+4}{x+1} &= \frac{2x^2\cdot(x+1)-9x^2-5x+4}{x+1}\\ &= 2x^2 + \frac{-9x\cdot(x+1)+4x+4}{x+1}\\ &= 2x^2 - 9x + \frac{4x+4}{x+1}\\ &= 2x^2 - 9x + 4\end{aligned}$$

Bestimme, wenn vorhanden, weitere Nullstellen von **f**.

Wenn wir nun den Funktionsterm z.B. durch das Monom (x - 3) teilen, so erwarten wir als Ergebnis der Division, neben einem Term 2. Grades, einen Restterm.

Die Rechnung (in verkürzter Schreibweise):

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-7x^2-5x+4}{x-3} &= \frac{2x^2\cdot(x-3)-1x^2-5x+4}{x-3}\\ &= 2x^2 + \frac{-1x\cdot(x-3)-8x+4}{x-3}\\ &= 2x^2 - 1x + \frac{-8x+4}{x-3}\\ &= 2x^2 - 1x - 8 - \frac{20}{x-3}\end{aligned}$$

Als Proberechnung erweitere den Term 2. Grades mit (x - 3) und fasse mit dem Restterm zusammen.

---

<u>Eine andere Schreibweise:</u>

Wir fassen den Bruchstrich algebraisch als Divisionszeichen auf und rechnen im Sinne der Algebra.

$$(2x^3-7x^2-5x+4) : (x-3) = 2x^2 + ?$$

Wir wissen zunächst nur, wie der Term 2. Grades am Anfang lauten muss. Nun die rückwärtige Proberechnung:

$$\begin{aligned}&(2x^3-7x^2-5x+4) : (x-3) = 2x^2 + ?\\ &(2x^3-6x^2)\end{aligned}$$

Nun ergibt der Vergleich (man kann das auch als Termsubtraktion auffassen):

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = 2x^2 + ? \\
\underline{(2x^3 - 6x^2)} \\
\qquad -1x^2
\end{array}$$

Vergleiche mit unserem vorherigen Verfahren. - Wir setzen nun unsere Division fort.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = 2x^2 - 1x + ? \\
\underline{(2x^3 - 6x^2)} \\
\qquad (-1x^2 - 5x + 4)
\end{array}$$

Nun wieder die rückwärtige Proberechnung:

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = 2x^2 - 1x + ? \\
\underline{(2x^3 - 6x^2)} \\
\qquad (-1x^2 - 5x + 4) \\
\qquad (-1x^2 + 3x)
\end{array}$$

Nun wiederum Vergleich bzw. Termsubtraktion:

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = 2x^2 - 1x + ? \\
\underline{(2x^3 - 6x^2)} \\
\qquad (-1x^2 - 5x + 4) \\
\qquad \underline{(-1x^2 + 3x)} \\
\qquad\qquad (-8x + 4)
\end{array}$$

Der nächste Schritt:

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = 2x^2 - 1x - 8 + ? \\
\underline{(2x^3 - 6x^2)} \\
\qquad (-1x^2 - 5x + 4) \\
\qquad \underline{(-1x^2 + 3x)} \\
\qquad\qquad (-8x + 4) \\
\qquad\qquad \underline{(-8x + 24)} \\
\qquad\qquad\qquad -20
\end{array}$$

Damit ergibt sich als Ergebnis der Division:[1]

$$(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = 2x^2 - 1x - 8 + \frac{-20}{x - 3}$$

und

$$\mathbf{f}(x) = 2 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4 = (2 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 4) \cdot (x + 1) = (2 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 8) \cdot (x - 3) - 20$$

[1] In dieser Schreibweise heißt die Polynomdivision auch ‘Euklidischer Algorithmus’.

# Polynomdivision

**Nullstellensuche - Faktorisierung von Termen - Bestimmung von Resttermen ... - Oder: Was hat das mit Euklid zu tun ?**

Übung:

Als ein etwas aufwendigeres Beispiel sei **f** mit $\mathbf{f}(x) = 2\cdot x^4 + 4\cdot x^3 - 29\cdot x^2 + 2\cdot x - 15$ gegeben.

1. Wir versuchen eine Faktorisierung mit dem quadratischen Term $(2\cdot x^2 + 1)$.

$$\frac{2x^4+4x^3-29x^2+2x-15}{2x^2+1} = \frac{x^2\cdot(2x^2+1)+4x^3-30x^2+2x-15}{2x^2+1}$$

$$= x^2 + \frac{2x\cdot(2x^2+1)-30x^2-15}{2x^2+1}$$

$$= x^2 + 2x + \frac{-15\cdot(2x^2+1)}{2x^2+1}$$

$$= x^2 + 2x - 15$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{f}(x) = 2\cdot x^4 + 4\cdot x^3 - 29\cdot x^2 + 2\cdot x - 15 = (x^2+2\cdot x-15)\cdot(2\cdot x^2+1)$

Lässt sich der Funktionsterm von **f** noch weiter faktorisieren?

........................................................................................................................................................................

2. Wir versuchen eine Faktorisierung mit dem quadratischen Term $(2\cdot x^2 - 3)$.

$$\frac{2x^4+4x^3-29x^2+2x-15}{2x^2-3} = \frac{x^2\cdot(2x^2-3)+4x^3-26x^2+2x-15}{2x^2-3}$$

$$= x^2 + \frac{2x\cdot(2x^2-3)-26x^2+8x-15}{2x^2-3}$$

$$= x^2 + 2x + \frac{-13\cdot(2x^2-3)+8x-54}{2x^2-3}$$

$$= x^2 + 2x - 13 + \frac{8x-54}{2x^2-3}$$

Da nun der Grad des Zählerterms kleiner als der Grad des Nennerterms ist, bricht das Verfahren hier ab.

$\Rightarrow$ $\mathbf{f}(x) = 2\cdot x^4 + 4\cdot x^3 - 29\cdot x^2 + 2\cdot x - 15 = (x^2+2\cdot x-13)\cdot(2\cdot x^2-3) + 8\cdot x - 54$