Lineare Abbildungen und Basistransformationen

oder: ... Ein anderes Bezugssystem kann manchmal nützlich sein

Gegeben sei eine lineare Abbildung **f** zwischen zwei Vektorräumen **V** und **W** (**V**, **W** $\cong \mathbb{R}^3$), die bezüglich der kanonischen Basis **B** durch die folgende Matrix $\mathbf{A_f}$ beschrieben wird:

$$\mathbf{A_f} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

---

1) Bestätigen Sie, dass gilt: $\mathbf{f}(\vec{v}) := \mathbf{A_f} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 22 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix}_B$

Möchte man nun die Vektoren der beiden Vektorräume bezüglich einer anderen Basis $\mathbf{B^*}$ darstellen, so verändert sich natürlich nicht nur die Spaltendarstellung der Vektoren, sondern auch die zur linearen Abbildung **f** gehörende Matrix $\mathbf{A_f^*}$, da ja bekanntlich eine Matrix eine <u>basisabhängige</u> Darstellung einer linearen Abbildung ist. - Doch wie?

Es sei nun: $\mathbf{B}^* := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2) Bestätigen Sie, dass $\mathbf{B^*}$ orthogonale Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Zur Bestimmung der neuen Komponenten von $\vec{v}$ bezüglich $\mathbf{B^*}$ ist das folgende LGS zu lösen:

$$\vec{v}^* := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B^*} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}_B$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrrrl} & 1 \cdot x & + & 2 \cdot y & - & 2 \cdot z & = 4 \\ \wedge & 2 \cdot x & + & 1 \cdot y & + & 2 \cdot z & = 7 \\ \wedge & 2 \cdot x & - & 2 \cdot y & - & 1 \cdot z & = 11 \end{array} \right\}$$

das sich bekanntlich auch als Abbildungsgleichung $\vec{v} := \mathbf{T} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}_B$ schreiben läßt, wobei die Spalten der Transformationsmatrix **T** durch die neuen Basisvektoren gebildet werden. - Es gilt offensichtlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}_B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B^*} = \mathbf{T}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}_B$$

d.h. mit der inversen Matrix $\mathbf{T^{-1}}$ der Transformationsmatrix **T** berechnet man die Darstellung von Vektoren bezüglich der neuen Basis $\mathbf{B^*}$, die Transformationsmatrix **T** transformiert zurück auf eine Darstellung bezüglich der kanonischen Basis **B**.

Lineare Abbildungen und Basistransformationen

oder: ... Ein anderes Bezugssystem kann manchmal nützlich sein

3) Berechnen Sie zu **T** die inverse Matrix $\mathbf{T}^{-1}$. - Fällt etwas auf ?[1]

4) Bestätigen Sie, dass gilt: $\vec{v}^{\,*} := \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 40 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}_{B^*}$; $\vec{w}^{\,*} := \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 94 \\ 59 \\ 7 \end{pmatrix}_{B^*}$

5) Erläutern Sie anhand des nebenstehenden Diagramms, dass die zur linearen Abbildung **f** gehörende Matrix $\mathbf{A_f^*}$ bestimmt ist durch:

$$\mathbf{A_f^*} = \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{A_f} \circ \mathbf{T}$$

$$\mathbf{A_f^*} := \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbf{W} \arrow[d, "\mathbf{T}^{-1}"] \\ \mathbf{V}^* \arrow[u, "\mathbf{T}"] \arrow[r, "\mathbf{A}^*"] & \mathbf{W}^* \end{tikzcd}$$

6) Berechnen Sie $\mathbf{A_f^*}$ und bilden Sie mit der Matrix $\mathbf{A_f^*}$ den in Aufgabe 4) bestimmten Vektor $\vec{v}^{\,*}$ ab. Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen? - Welchen Vektor erwarten Sie, wenn Sie die Transformationsmatrix **T** auf den in 4) bestimmten Vektor $\vec{w}^{\,*}$ anwenden?

---

7) Gegeben sei eine neue Matrix $\mathbf{A_g}$, die zu einer anderen linearen Abbildung **g**: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gehört, wobei die kanonische Basis **B** zugrunde gelegt ist.

$$\mathbf{A_g} := \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 19 & -2 & 4 \\ 4 & 10 & -2 \\ 4 & -8 & 25 \end{pmatrix}$$

Die neue Basis $\mathbf{B}^*$ sei nun: $\mathbf{B}^* := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Zeigen Sie: Die Matrix $\mathbf{A_g^*}$, welche die lineare Abbildung **g** bezüglich der neuen Basis $\mathbf{B}^*$ beschreibt, lautet:

$$\mathbf{A_g^*} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Was ist demnach das Besondere der Basis $\mathbf{B}^*$? - Was bedeutet dies geometrisch ?

8) Bestimmen Sie (zur Kontrolle) die Bilder: $\mathbf{g}\left(\vec{b}_1^{\,*}\right)$, $\mathbf{g}\left(\vec{b}_2^{\,*}\right)$ und $\mathbf{g}\left(\vec{b}_3^{\,*}\right)$ der Basisvektoren aus $\mathbf{B}^*$. - Sind diese Ergebnisse mit Aufgabenteil 7) verträglich ?[2]

---

[1] Würde man <u>in diesem Fall</u> die Basis $\mathbf{B}^*$ noch normieren (alle Vektoren haben den Betrag 3), so wäre die inverse Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ gleich der transponierten Matrix $\mathbf{T}^{\top}$ von **T**, d.h. Zeilen und Spalten sind nur vertauscht.
<u>Definition:</u> Eine Matrix **M**, für die gilt: $\mathbf{M}^{\top} = \mathbf{M}^{-1}$, heißt orthogonal.

[2] <u>Definition:</u> Gibt es für eine Matrix **M** einen Vektor $\vec{v}$ und eine reelle Zahl λ mit: $\mathbf{M} \circ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$, so heißt $\vec{v}$ Eigenvektor, λ Eigenwert der Matrix **M**.