Zum Erwartungswert μ einer binomialverteilten Zufallsfunktion

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E(X)} = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$= n\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot p^{k-1}\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$= n\cdot p\cdot\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\cdot[(n-1)-k]!}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= n\cdot p\cdot\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= n\cdot p\cdot\left[p + (1-p)\right]^{n-1}$$

$$= n\cdot p\cdot 1^{n-1}$$

$$= \mathbf{n\cdot p}$$

Es gilt: $\quad 1 = 1^{n} = [p + (1-p)]^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B(n;p;k)$

Zur Varianz Var(X) =: σ^2 einer binomialverteilten Zufallsfunktion

Voraussetzung:

$n \in \mathbb{N}$; $n > 1$

$$\mathbf{Var(X)} = \sigma^2$$

$$:= \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot B(n;p;k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot B(n;p;k) - 2\cdot\mu\cdot\sum_{k=0}^{n} k\cdot B(n;p;k) + \mu^2\cdot\sum_{k=0}^{n} B(n;p;k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} - n^2\cdot p^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} - n^2\cdot p^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!\cdot(n-2-k)!}\cdot p^{k+2}\cdot(1-p)^{n-2-k} + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{(n-2)-k} + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot[p + (1-p)]^{n-2} + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot 1 + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= n^2\cdot p^2 - n\cdot p^2 + n\cdot p - n^2\cdot p^2$$

$$= n\cdot p - n\cdot p^2$$

$$= \mathbf{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

Für **n=1** gilt:

Var(X) =
$(0-p)^2\cdot(1-p) + (1-p)^2\cdot p$ =
$[\,p^2 + (p - p^2)\,]\cdot(1-p)$ =
$p\cdot(1-p)$

Zur Varianz Var(X) =: σ^2 einer binomialverteilten Zufallsfunktion

$$\mathbf{Var(X)} := \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot B(n;p;k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot B(n;p;k) - 2\cdot\mu\cdot\sum_{k=0}^{n} k\cdot B(n;p;k) + \mu^2\cdot\sum_{k=0}^{n} B(n;p;k)$$

$$= E(X^2) - 2\cdot\mu\cdot\mu + \mu^2 = \mathbf{E(X^2) - \mu^2}$$

Sei:

$$f(x) = [p\cdot x + (1-p)]^n$$

$$f'(x) = n\cdot p\cdot [p\cdot x + (1-p)]^{n-1}$$

$$f''(x) = n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot[p\cdot x + (1-p)]^{n-2}$$

$$f''(1) = n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot[p\cdot 1 + (1-p)]^{n-2}$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot 1^{n-2} = \mathbf{n\cdot(n-1)\cdot p^2}$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-2-k}$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}\cdot p^{k+2}\cdot(1-p)^{n-2-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!\cdot(n-2-k)!}\cdot p^{k+2}\cdot(1-p)^{n-2-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2\cdot B(n;p;k) - \sum_{k=0}^{n} k\cdot B(n;p;k)$$

$$= E(X^2) - \mu = \mathbf{Var(X)} + \boldsymbol{\mu^2} - \boldsymbol{\mu}$$

<u>Voraussetzung:</u>

n $\in \mathbb{N}$ **; n > 1**

<u>Für **n=1** gilt:</u>

Var(X) =
$(0-p)^2\cdot(1-p) + (1-p)^2\cdot p =$
$[\,p^2 + (p - p^2)\,]\cdot(1-p) =$
p·(1-p)

$\Longrightarrow$ **Var(X) =** $n^2\cdot p^2 - n\cdot p^2 - \mu^2 + \mu = \mu - n\,p^2 = n\cdot p - n\cdot p^2 = n\cdot p\cdot(1-p) = \mathbf{n\cdot p\cdot q}$
