Zu den Brennpunktseigenschaften von Kegelschnitten

Verschiedene mathematische Gebiete kann man verbinden!

Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung:

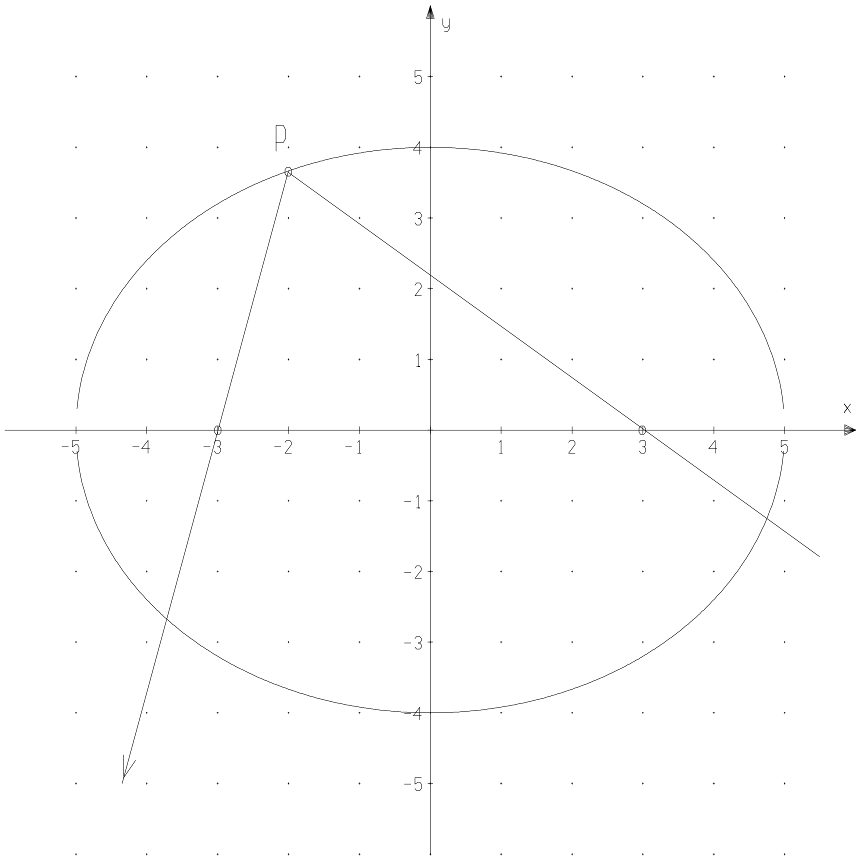
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Die Brennpunkte F_1 und F_2 liegen demnach bekanntlich an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$.

Aber warum heißen F_1 und F_2 eigentlich Brennpunkte?

Wir denken uns (obwohl wir uns natürlich im Zweidimensionalen befinden) einen Lichtstrahl, der durch F_2 verläuft und im Punkt P auf den Graphen der Ellipse trifft. Er soll dort nach dem Reflexionsgesetz reflektiert werden.

<u>Beh.:</u> Der reflektierte Lichtstrahl verläuft durch F_1.



1.) Es sei $x_P = -2$. Zeigen Sie, dass die Richtungen der Geraden $g_1(F_1;P)$ und $g_2(F_2,P)$ durch die folgenden Richtungsvektoren beschrieben werden können:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4\cdot\sqrt{21} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ -4\cdot\sqrt{21} \end{pmatrix}$$

2.) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente im Punkte P der Ellipse sowie die Steigung der zugehörigen Normalen. Zeichnen Sie Tangente und Normale in die obige Graphik ein.

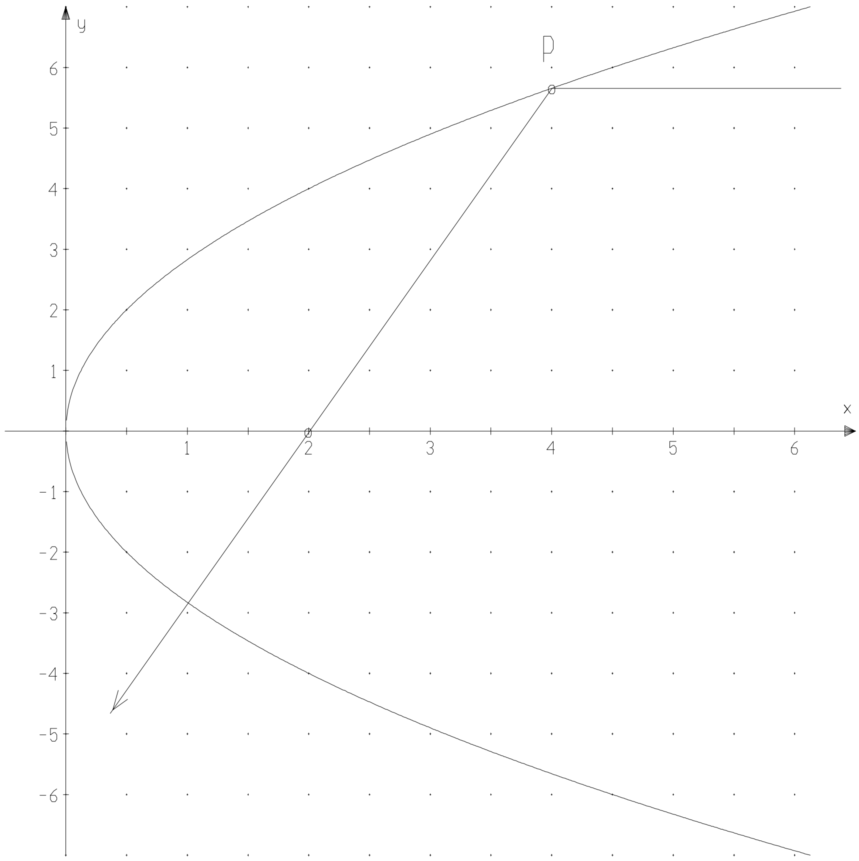
3.) Bestätigen Sie, dass die Richtung der Normalen im Punkt P durch den Vektor: $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} 8 \\ -5\cdot\sqrt{21} \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann.

4.) Bestimmen Sie die Größen der spitzen Winkel zwischen der Normale und den Geraden g_1 und g_2. Bestätigen Sie in diesem Spezialfall (im Rückschluß) die Behauptung.

5.) <u>Zur Übung:</u> Führen Sie die Rechnungen 1.) - 4.) ein weiteres Mal durch, entweder für allgemeines x_P (für Mutige) oder für $x_P = 4$.

Zu den Brennpunktseigenschaften von Kegelschnitten

Verschiedene mathematische Gebiete kann man verbinden!



Wie sieht der Fall nun bei der Parabel aus? - Sie wissen sicherlich, dass z.B. der Reflektor eines Autoscheinwerfers ein Parabolspiegel ist und dass Aufblend- und Abblendlicht dadurch entsteht, welche Glühwendel der Biluxbirne gerade brennt: diejenige, die im Brennpunkt des Parabolspiegels steht, oder die, die weiter vom Scheitelpunkt entfernt ist.

Wir behandeln das Problem wieder mathematisch-zweidimensional.

Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung: $y^2 = 8 \cdot x = 2 \cdot 4 \cdot x$.
Es gilt also $p = 4$ und bekanntlich ist dann die x - Koordinate des Brennpunktes $x_F = \frac{p}{2} = 2$.

<u>Beh.:</u> Ein Parallelstrahl wird so an der Parabel reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den Brennpunkt verläuft (natürlich ist der Lichtweg auch umkehrbar: Aufblendlicht!)

1.) Es sei $x_P = 4$. Zeigen Sie, dass die Richtungen der achsenparallelen Gerade g_1 und der Gerade $g_2(F,P)$ durch die folgenden Richtungsvektoren beschrieben werden können:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2.) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente im Punkte P der Parabel sowie die Steigung der zugehörigen Normalen. Zeichnen Sie Tangente und Normale in die obige Graphik ein.

3.) Bestätigen Sie, dass die Richtung der Normalen im Punkt P durch den Vektor: $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann.

4.) Bestimmen Sie die Größen der spitzen Winkel zwischen der Normale und den Geraden g_1 und g_2. Bestätigen Sie in diesem Spezialfall (im Rückschluß) die Behauptung.

5.) <u>Zur Übung:</u> Führen Sie die Rechnungen 1.) - 4.) ein weiteres Mal durch, entweder für allgemeines x_P (für Mutige) oder für $x_P = 1$.