Beschränktes und logistisches Wachstum
Mit welcher Geschwindigkeit fällt ein Fallschirmspringer?

Die auf einen Fallschirmspringer momentan wirkende Kraft ist eine Superposition der Gravitationskraft und der Reibungskraft, deren wesentliche Ursache die Oberfläche ist, die der Fallschirmspringer dem umgebenden Medium, der Luft bietet. Die Kräfte wirken entgegengesetzt und die Größe der Reibungskraft ist abhängig von der Momentangeschwindigkeit des Fallschirmspringers. Wir wollen annehmen, - was physikalisch nicht ganz korrekt ist - , dass diese Abhängigkeit eine direkte Proportionalität ist. Damit ergibt sich für die Momentangeschwindigkeit des Fallschirmspringers folgende Differentialgleichung:

$$m \cdot v'(t) = m \cdot g - c \cdot v(t) .$$

---

1. Zeige durch geeignete Integration mit Substitution, dass mit der Anfangswertbedingung[1]: $v(0) = 0$ die Differentialgleichung durch die folgende Funktion v gelöst wird:

$$v(t) = \frac{m \cdot g}{c} \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{m} \cdot t} \right) .$$

---

2. Das Ergebnis wollen wir nun physikalisch interpretieren: Bekanntlich ist $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$ und wir nehmen an, dass die Masse des Springers: $m = 75$ kg beträgt. Was sind nun sinnvolle Größen für die Reibungskonstante c ? Bestimme den jeweiligen Grenzwert der Geschwindigkeit für die nachfolgenden 3 Fälle von c:

$$c_1 := 1 \frac{kg}{s} \quad ; \qquad c_2 := 50 \frac{kg}{s} \quad ; \qquad c_3 := 100 \frac{kg}{s} .$$

Zeige, dass der Fall (2) mit der erreichten Endgeschwindigkeit einem Sprung (ohne Reibung) aus ungefähr 11,47 m Höhe entspräche, bei der doppelt so großen Reibungskonstanten des Falles (3) müßte man einen vergleichbaren Sprung aus ungefähr 2,87 m durchführen.

Mathematisch gesehen ist der Sachverhalt eigentlich immer derselbe, ob man die Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers, die Sinkgeschwindigkeit eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit, die Abkühlung (oder Erwärmung) eines Körpers in einem umgebenden Medium mit konstanter, anderer Temperatur, etc - oder die folgende Wachstumsproblematik einer Population betrachtet:

Der Lebensraum einer Population $\boldsymbol{N_1(t)}$ *kann nur eine (nach oben) beschränkte Anzahl von Individuen 'versorgen'. Die (positive) Wachstumsgeschwindigkeit* $\boldsymbol{N_1'(t)}$ *der Population nimmt ab, je mehr sich die momentane Population der oberen Grenze nähert, d.h. es erscheint der folgende Ansatz vernünftig:*

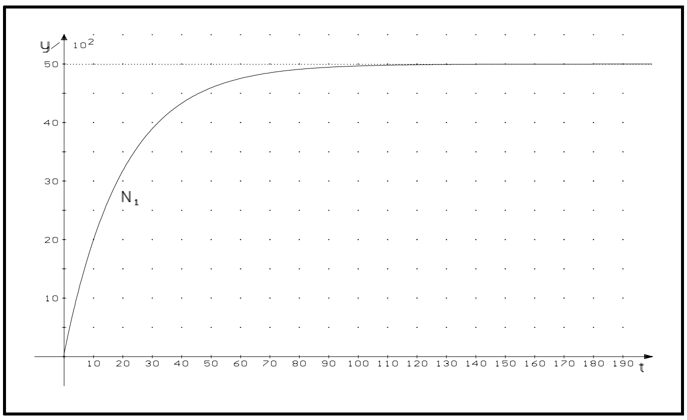
$$\mathbf{N_1'(t) \sim (G - N_1(t)).}$$

Im mathematischen Modell lautet die zugehörige Differentialgleichung stets:

$$\mathbf{y' = k \cdot (G - y)} \; ; \; k,G \in \mathbb{R}^+.$$

3. Löse die gegebene Differentialgleichung und bestätige, dass die folgende Gleichung die Funktionsgleichung einer <u>allgemeinen</u> Lösungsfunktion darstellt:

$$\mathbf{y = G - C \cdot e^{-k \cdot t}} \; ; \; C \in \mathbb{R}.$$



[1] Auf physikalische Einheiten verzichten wir zunächst. Als mathematische „Fachidioten" rechnen wir mit Maßzahlen.

Beschränktes und logistisches Wachstum
Mit welcher Geschwindigkeit fällt ein Fallschirmspringer?

Wähle als Zeiteinheit 1 Tag, und es gelte: $\mathbf{N_1(0) = 50}$; $\mathbf{G = 5000}$; $\mathbf{k = 0{,}05}$.

Gib die <u>spezielle</u> Funktionsgleichung der Funktion $\mathbf{N_1}$ an! - Nach welcher Zeit hat die Population die Hälfte der Grenzpopulation erreicht?

Der obige Ansatz ist im mathematischen Modell in einer Hinsicht unrealistisch, nämlich zumeist ist die Wachstumsrate auch noch proportional zu der momentanen Größe der Population, d.h. es gilt:

$$\mathbf{N_2'(t) \sim (G - N_2(t))} \quad \underline{\textit{und}} \quad \mathbf{N_2'(t) \sim N_2(t)}.$$

Demnach lautet die zugehörige Differentialgleichung nun:

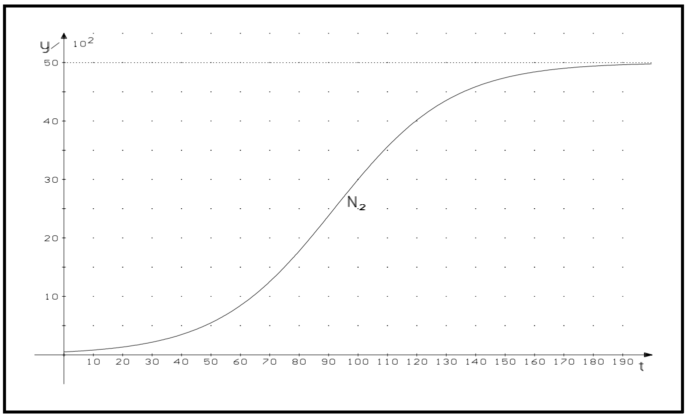
$$\mathbf{y' = k \cdot (G - y) \cdot y} \; ; \; k,G \in \mathbb{R}^+.$$

4. Zeige, dass sich diese Differentialgleichung durch die Substitution: $\mathbf{z = 1/y}$ auf eine Differentialgleichung des obigen Typs zurückführen läßt (evtl. andere Konstanten) und bestätige danach, dass sich der Wachstumsvorgang nun, mit den speziellen Werten:

$$\mathbf{N_2(0) = 50} \; ; \; \mathbf{G = 5000} \; ; \; \mathbf{k = 10^{-5}},$$

durch die folgende Funktionsgleichung beschreiben läßt:

$$\mathbf{N_2(t) = \frac{5000}{99 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} + 1}}$$



Bestätige durch geeignete Einsetzungen, dass der angegebene Graph die Populationsentwicklung (logistisches Wachstum) richtig darstellt. (Physikalische Einheit von k?)

Und nun noch, zur Übung, ein wenig Standardanalysis!

Es sei $\mathbf{N_2^*(t) := 99 \cdot N_2(t) / 5000}$.

5. Gib die Funktionsterme der 1. und 2. Ableitung von $\mathbf{N_2^*}$ an, und bestimme durch Untersuchung einer <u>notwendigen</u> Bedingung den Zeitpunkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit der Population $\mathbf{N_2}$ am größten ist.

6. Untersuche, ob man im mathematischen Sinn der (sich bis ins Unendliche erstreckenden) Fläche zwischen der y-Achse, dem Graphen von $\mathbf{N_1}$ und dem Graphen der konstanten Funktion $\mathbf{f}$ mit $\mathbf{f(t) = 5000}$ eine endliche Flächenmaßzahl zuordnen kann.