Differentialgleichungen

für harmonische Schwingungen

MECHANIK

Harmonischer Oszillator (z.B. Federpendel):

$$m \cdot s''(t) + k \cdot s(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s''(t) + \frac{k}{m} \cdot s(t) = 0$$

<u>Ansatz:</u> $s(t) = K \cdot e^{\lambda \cdot t\,(-\varphi)} \;(= I(t))$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \;; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = K \cdot e^{i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t} + K \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = 2 \cdot K \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = s(0) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

---

mit Reibung: $F_R \sim v(t)$; $F_R = d \cdot s'(t)$

$$m \cdot s''(t) + d \cdot s'(t) + k \cdot s(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s''(t) + \frac{d}{m} \cdot s'(t) + \frac{k}{m} \cdot s(t) = 0$$

ELEKTRIZITÄTSLEHRE

Schwingkreis mit Spule und Kondensator:

$$\frac{Q}{C} = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad L \cdot I''(t) + \frac{1}{C} \cdot I(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad I''(t) + \frac{1}{LC} \cdot I(t) = 0$$

Entsprechend dem Ansatz im mechanischen Fall ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot i \;; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot i$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = I(0) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot t\right)$$

---

mit Widerstand (ohne außen anliegende Spannung): $U = R \cdot I$

$$\frac{Q}{C} + R \cdot I + L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad L \cdot I''(t) + R \cdot I'(t) + \frac{1}{C} \cdot I(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad I''(t) + \frac{R}{L} \cdot I'(t) + \frac{1}{LC} \cdot I(t) = 0$$

Differentialgleichungen
für harmonische Schwingungen

Lösung (im elektrischen Fall): $I(t) = K \cdot e^{\lambda \cdot t\,(-\varphi)} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{LC}}$

1.Fall:

Wenn gilt: $\frac{R^2}{4 \cdot L^2} < \frac{1}{LC} \Leftrightarrow R^2 \cdot C < 4 \cdot L$, dann:

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{R}{2 \cdot L} + \sqrt{\left| \frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{LC} \right|} \cdot i \; ; \quad \lambda_2 = -\frac{R}{2 \cdot L} - \sqrt{\left| \frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{LC} \right|} \cdot i$$

$$\Rightarrow I(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{2 \cdot L} \cdot t} \cdot \left(2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}} \cdot t \right) \right)$$

$$\Rightarrow I(t) = I(0) \cdot e^{-\frac{R}{2 \cdot L} \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}} \cdot t \right)$$

2.Fall:

Wenn gilt: $\frac{R^2}{4 \cdot L^2} \geq \frac{1}{LC} \Leftrightarrow R^2 \cdot C \geq 4 \cdot L$, dann:

?

Ein wenig selbständige Überlegung muß schon sein!