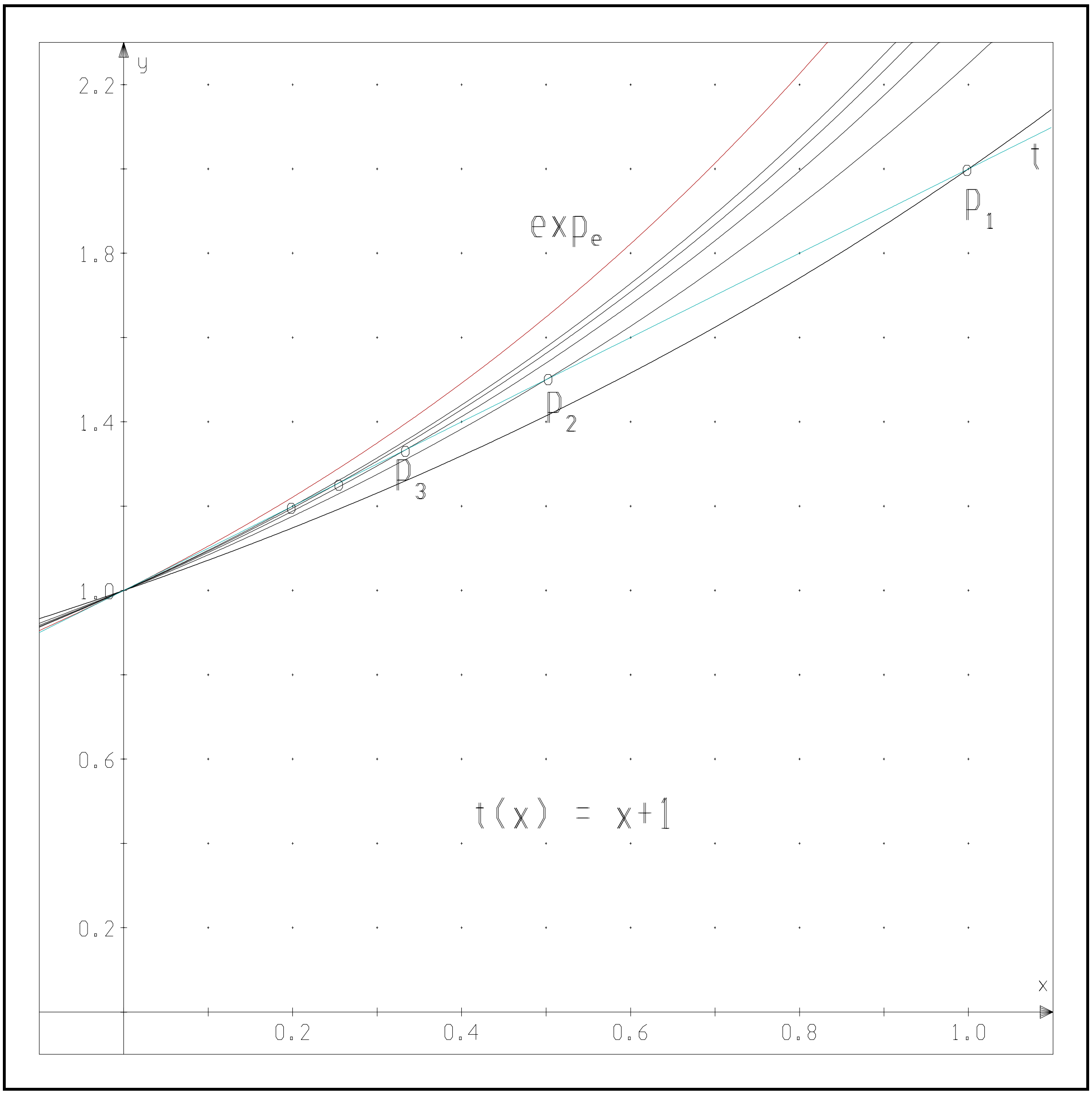
Zur Eulerschen Zahl *e*



Gegeben ist eine Folge von Punkten $\mathbf{P_n}(x_n \mid y_n)$ auf der Geraden **t** mit **t**(x) = x+1.
Die x-Koordinaten der Punkte $\mathbf{P_n}$ werden definiert durch: $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Geben Sie die jeweilige Basis $\mathbf{a_n}$ einer Exponentialfunktion $\mathbf{exp_a}$ an, welche die Gerade **t** nicht nur im Punkte **(0 | 1)** schneidet, sondern auch noch im Punkte $\mathbf{P_n}$!

n	x_n	y_n	a_n
1			
2			
5			
10			
100			
10000			

Es wird definiert: $\boxed{\mathbf{e} := \lim_{n\to\infty} a_n}$

(Die tatsächliche **Existenz** ist damit natürlich noch nicht gezeigt! - Dazu müßte man **e** als innere Zahl einer Intervallschachtelung definieren!)

Zur Eulerschen Zahl *e*

Folgerungen: (Zur konkreten Bestimmung von Näherungswerten)[1]

a)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{n^{i}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2\cdot n^{2}}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot n^{3}}+\;.....\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\;.....\right) \\
&= 1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\;..... \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}
\end{aligned}
$$

---

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^{x} \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

---

c)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\mathbf{x}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\frac{x^{i}}{n^{i}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot x^{2}+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot x^{3}+\;.....\right) \\
&= 1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^{2}+\frac{1}{3!}\cdot x^{3}+\frac{1}{4!}\cdot x^{4}+\;..... \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{i}}{i!}
\end{aligned}
$$

---

[1] Das Folgende sind keine korrekten <u>Beweise</u>, insbesondere der Übergang von der 4. zur 5. Zeile bei a) und von der 3. zur 4. Zeile bei c) ist höchst problematisch (warum wohl?) . Erst gegen Ende des 2. Semesters werden wir im Leistungskurs die notwendigen Abschätzungen durchführen können.

d) Zur Güte der Näherung von **e** durch eine Partialsumme (S_{10}):

$$\mathbf{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{10} \right) + \ldots\ldots + \frac{1}{10!} \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{10} \right) \cdot \ldots\ldots \cdot \left(1 - \frac{9}{10} \right) + \mathbf{R_{10}}$$

Abschätzung des Restgliedes $\mathbf{R_{10}}$:

$$\mathbf{R_{10}} < \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \frac{1}{13!} + \ldots\ldots = \frac{1}{10!} \cdot \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{11 \cdot 12 \cdot 13} + \ldots\ldots \right)$$

$$< \frac{1}{10!} \cdot \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \ldots\ldots \right) = \frac{1}{10!} \cdot \frac{1}{10}$$

Damit gilt: Das Restglied $\mathbf{R_n}$ ist stets kleiner als : $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}$

Insbesondere gilt damit:

$$\boxed{\mathbf{e} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \mathbf{R_n}}$$

wobei der maximale Fehler $\mathbf{R_n}$ sicher kleiner als der zuletzt berücksichtigte Summand: $\frac{1}{n!}$ ist.

Damit ist **e** durch die 10. Partialsumme der Reihe schon auf mindestens 6 Nachkommastellen genau angegeben.

Zur Eulerschen Zahl e

n	$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$
0	1,000000000000000
1	2,000000000000000
2	2,500000000000000
3	2,666666666666667
4	2,708333333333333
5	2,716666666666666
6	2,718055555555555
7	2,718253968253968
8	2,718278769841270
9	2,718281525573192
10	2,718281801146385
11	2,718281826198493
12	2,718281828286169
13	2,718281828446759
14	2,718281828458230
15	2,718281828458995
16	2,718281828459043
17	2,718281828459046
18	2,718281828459046

x	n	$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot x^{i}$
1,50	0	1,000000000000000
1,50	1	2,500000000000000
1,50	2	3,625000000000000
1,50	3	4,187500000000000
1,50	4	4,398437500000000
1,50	5	4,461718750000000
1,50	6	4,477539062500000
1,50	7	4,480929129464286
1,50	8	4,481564767020090
1,50	9	4,481670706612723
1,50	10	4,481686597551619
1,50	11	4,481688764497831
1,50	12	4,481689035366108
1,50	13	4,481689066620140
1,50	14	4,481689069968787
1,50	15	4,481689070303651
1,50	16	4,481689070335045
1,50	17	4,481689070337815
1,50	18	4,481689070338046
1,50	19	4,481689070338065
1,50	20	4,481689070338066

<u>Tipp für die Berechnung von Partialsummen:</u>

Horner-Schema!

Beispiel:

$$\sum_{i=0}^{8} \frac{x^{i}}{i!} = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{x}{8}+1\right)\cdot\frac{x}{7}+1\right)\cdot\frac{x}{6}+1\right)\cdot\frac{x}{5}+1\right)\cdot\frac{x}{4}+1\right)\cdot\frac{x}{3}+1\right)\cdot\frac{x}{2}+1\right)\cdot\frac{x}{1}+1$$