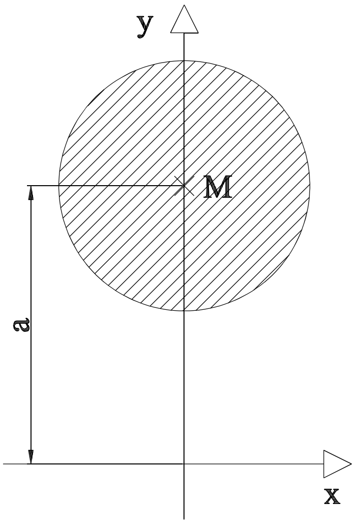
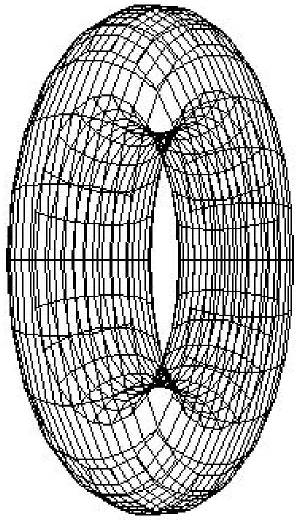
Rotationsvolumina

Auf den Spuren von Pappus und Guldin



Gegeben sei ein Kreis mit Radius **r**, dessen Mittelpunkt um **a** aus dem Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in Richtung der Ordinate verschoben sei.
Die Kreisfläche rotiere nun um die Abszisse, wodurch ein **Torus** beschrieben wird.



1) Bestätige, dass die Bestimmung des Rotationsvolumens $\mathbf{V_x}$ auf die Berechnung des folgenden Integrals führt:

$$\mathbf{V_x} = 8 \cdot \pi \cdot a \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

Bestätige durch (geeignete) Integration mit Substitution, dass der Wert dieses bestimmten Integrals beträgt:

$$\mathbf{V_x} = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \pi \cdot r^2$$

Ein erstaunliches Ergebnis! - Es sieht so aus, als sei das Rotationsvolumen das Produkt des Inhaltes der Kreisfläche und der Länge des Weges, den der Mittelpunkt bei der Rotation zurücklegt (Kreisumfang).

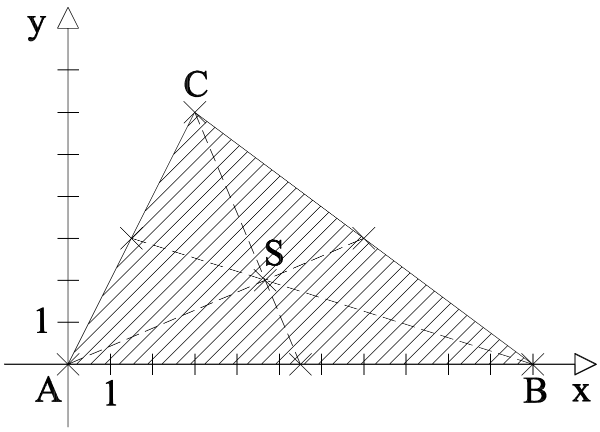
So ähnlich hat es der Schweizer Mathematiker **Paul Guldin**, geboren am 12.Juni 1577 in St. Gallen (Schweiz), gestorben am 3.November 1643 in Graz (Österreich), formuliert.

Paul Guldin verfasste ein Werk in vier Büchern “Centrobaryca”, in dem die “Guldinschen Regeln” bewiesen werden; jedoch finden sich diese Regeln schon im VII. Buch der Συναγωγή des Pappus von Alexandria (~290 - ~350).

Wir wollen den Sachverhalt noch etwas genauer untersuchen: Was ist denn im allgemeinen Fall der Mittelpunkt einer Fläche?

---

2) Bei der nebenstehenden Figur entsteht bei Rotation der Dreiecksfläche um die x-Achse ein Doppelkegel, dessen Volumen wir mit unseren Mittelstufenkenntnissen leicht bestimmen können. Da der Abstand eines Flächenelementes zur Rotationsachse sicher entscheidenden Einfluß auf das durch das Element beschriebene (Teil-)Volumen hat, so bietet sich als “Mittelpunkt” des Dreieckes wohl zu aller erst der Schnittpunkt **S** der Seitenhalbierenden des Dreieckes an, dessen Abstände zur Ecke bzw zur Seite sich bekanntlich wie 2 : 1 verhalten.



Trage in die Skizze die Punktkoordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, sowie der Seitenmittelpunkte ein. Bestimme die Koordinaten von **S** und bestätige, dass gilt:[1]

$$\mathbf{V_x} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 11 = 132\cdot\pi$$

$$\mathbf{A_\Delta} = 11\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 33 \; ; \; 2\cdot\pi\cdot y_s = 4\cdot\pi$$

$$\boxed{\mathbf{V_x} = 2\cdot\pi\cdot\mathbf{y_s}\cdot\mathbf{A_\Delta}}$$

---

2. Guldinsche Regel:

“Das Volumen **V** eines Rotationskörpers bei Rotation einer ebenen Fläche um eine Rotationsachse ist gleich dem Produkt des Flächeninhaltes **A** und der Länge des Weges, den der “Schwerpunkt” $\mathbf{S(\,x_s \mid y_s)}$ bei der Rotation zurücklegt (Kreisumfang).”

Entsprechend der obigen Beziehung gilt damit auch z.B.:

$$\boxed{\mathbf{V_y} = 2\cdot\pi\cdot\mathbf{x_s}\cdot\mathbf{A}}$$

und

$$\mathbf{S}\left(\frac{V_y}{2\cdot\pi\cdot A} \;\middle|\; \frac{V_x}{2\cdot\pi\cdot A}\right).$$

Wir wollen nun versuchen, die obige Beziehung zu beweisen. Bei dem Begriff des Schwerpunktes sollten wir uns etwas an den Physikunterricht der Mechanik starrer Körper und den Begriff der Drehmomente erinnern. Bekanntlich gilt z. B. beim Hebel, dass das Verhältnis der Hebelarme umgekehrt wie das Verhältnis der angehängten Massen ist, d.h. (wenn z die lineare Koordinate des Schwerpunktes ist):

$$\frac{x_1 - z}{z - x_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad\Leftrightarrow\quad x_1\cdot m_1 + x_2\cdot m_2 = z\cdot\left(m_1 + m_2\right)$$

Man kann sich also die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt denken, was, bezogen auf den Hebelarm z (von einer Achse oder Ebene), die gleiche Wirkung hat wie die Summe der Wirkungen der einzelnen Massen mit ihren einzelnen Hebelarmen.

Die Schwerpunktsbedingung für n Massen (Summe aller Drehmomente ist Null) lautet entsprechend:

$$z\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot m_i$$

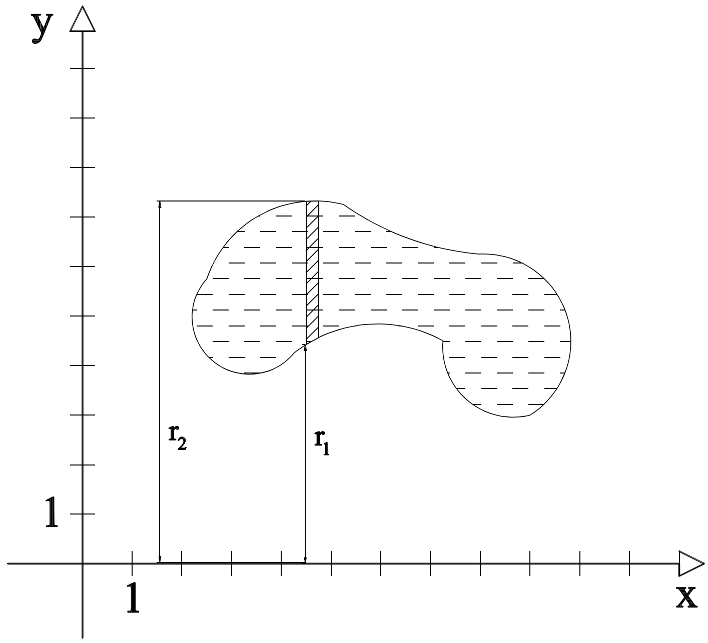
Bemerkung: Im kontinuierlichen Fall steht auf der rechten Seite der Gleichung natürlich ein Integral, doch für unsere Überlegungen soll es genügen, mit diskreten Summen zu arbeiten.

[1] Nur Maßzahlen, unter Verzicht auf Einheiten.

Rotationsvolumina

Auf den Spuren von Pappus und Guldin

Wir wollen uns vorstellen, die Fläche **A** sei in n Flächenstreifen Δf_i der Breite Δx_i unterteilt, wobei die Flächenstreifen senkrecht zur Rotationsachse (x-Achse) verlaufen sollen.[2]



Damit gilt: $\quad z \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}$

wobei r_1 und r_2 den minimalen und maximalen Abstand des Flächenstreifens zur Rotationsachse darstellt.

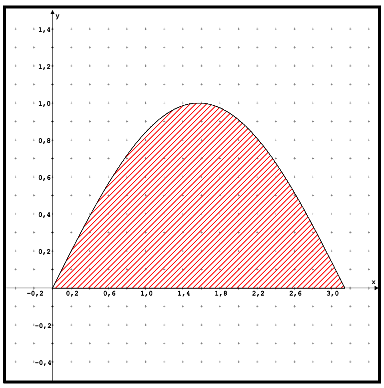
$$
\begin{aligned}
z \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i &\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_2 + r_1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right)
\end{aligned}
$$

Für das Volumen des Rotationskörpers gilt aber auch:

$$\mathbf{V} \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\pi \cdot r_2^2 \cdot \Delta x_i - \pi \cdot r_1^2 \cdot \Delta x_i\right) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(r_2^2 - r_1^2\right) \cdot \Delta x_i$$

Aus der Kombination der beiden Beziehungen ergibt sich (unter gedanklicher Einbeziehung einer immer feineren Unterteilung):

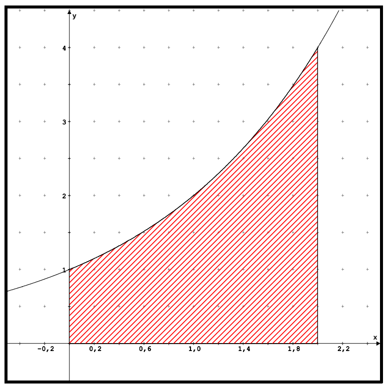
$$\boxed{2 \cdot z \cdot A = \frac{V}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \pi \cdot z \cdot A = V}$$



3) Bestimme die Koordinaten der jeweiligen Schwerpunkte für die Fläche unter dem Funktionsgraphen:

a) Der Sinusfunktion über dem Intervall: $[0;\pi]$

b) Der Exponentialfunktion zur Basis 2 über dem Intervall: $[0;2]$.



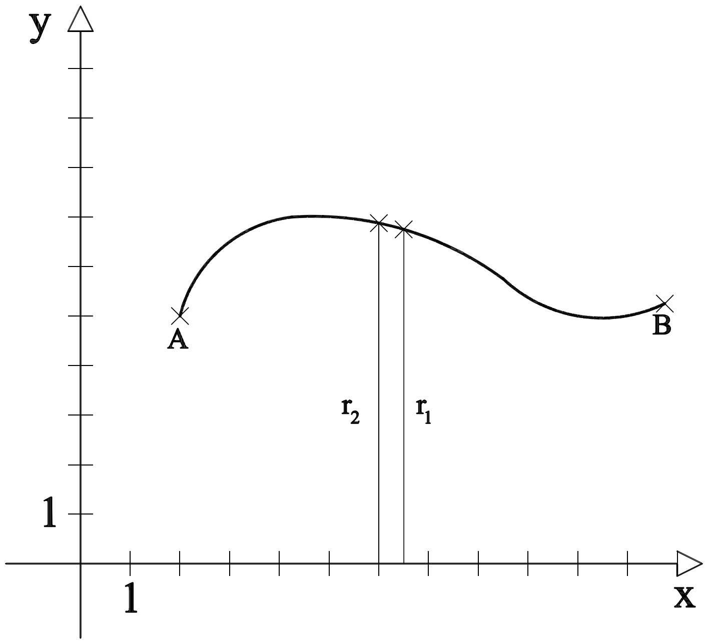
---

[2] Der Einfachheit halber sei nicht mehr zwischen Fläche und Flächeninhalt unterschieden.

Rotationsvolumina

Auf den Spuren von Pappus und Guldin

Wenn es eine 2. Guldinsche Regel gibt, so vermutlich auch eine erste.



1. Guldinsche Regel:

"Die Rotationsfläche **A** einer um eine Rotationsachse rotierende Linie, die in einer Ebene mit der Rotationsachse liegt, ist gleich dem Produkt der Länge **l** der Linie und der Länge des Weges, den ihr "Schwerpunkt" **S(** $\mathbf{x_s} \mid \mathbf{y_s}$**)** bei der Rotation zurücklegt (Kreisumfang)."

Die Linie **l** verlaufe vom Punkt A zum Punkt B und wir wollen uns vorstellen, dass sie durch n Sehnenstücke Δl_i approximiert sei.

Entsprechend der vorherigen Überlegungen gilt: $z \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Nun gilt außerdem (für den Mantel eines Kegelstumpfes): $\Delta f_i = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot \Delta l_i$, also:

$$\mathbf{A} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot \Delta l_i = 2 \cdot \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(r_1 + r_2)}{2} \cdot \Delta l_i \approx 2 \cdot \pi \cdot z \cdot \mathbf{l}$$

wobei wir am Schluß gedanklich von einer immer feineren Unterteilung ausgegangen sind.

---

4) Untersuche über den Fall der Rotation eines geeigneten Einheitshalbkreises, ob die "Schwerpunkte" nach der 1. und der 2. Guldinschen Regel identisch sind.

5) Auf dem nachfolgenden Blatt sind 4 Sicheln als Schnitt zweier Kreisbögen dargestellt. Bestimme die jeweilige Lage des Schwerpunktes der Sichelfläche.[3]

   Entscheide, ob es möglich ist, dass der Schwerpunkt auf dem Rand der Sichelfläche liegt.

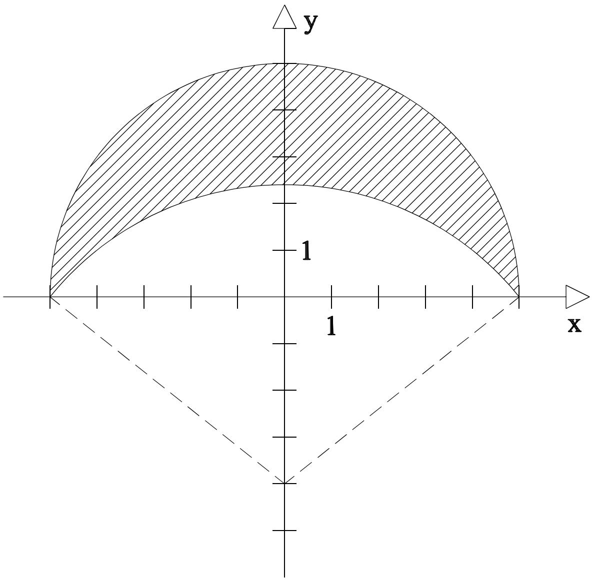
---

[3] Zusammenarbeit, evtl. in 4 Arbeitsgruppen, ist erwünscht. - Nach meiner Erinnerung eine Aufgabe von G. Steinberg, gelesen in "Der Mathematikunterricht".

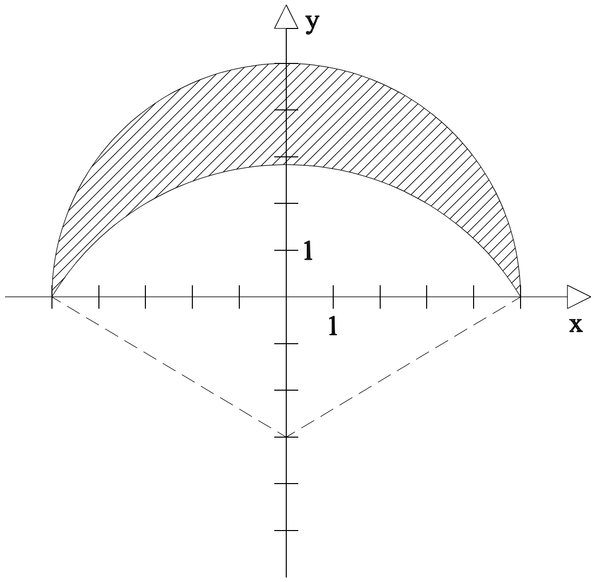
Rotationsvolumina

Auf den Spuren von Pappus und Guldin

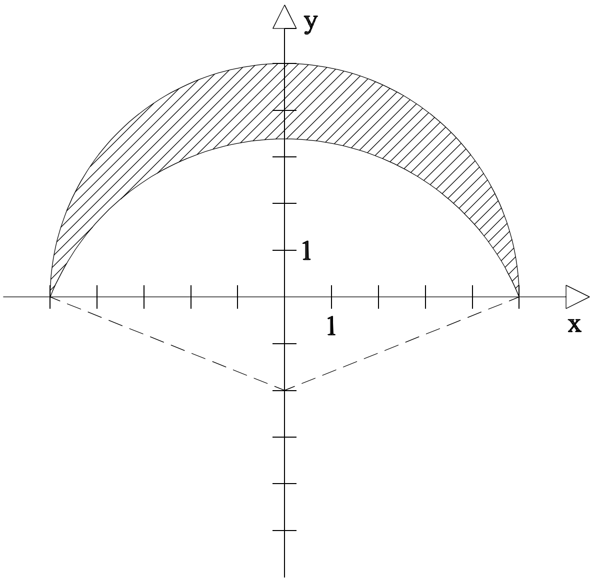
1)



2)



3)



4)