Die Regeln von *de l'Hospital*

$$" \frac{0}{0} "$$

Seien **u** und **v** stetig über [a ; b] und differenzierbar über] a ; b [und es gelte: $\bigwedge_{x\in]a;b[} \big(v(x) \neq 0\big) \wedge \big(v'(x) \neq 0\big)$, aber **u**(a) = 0 und **v**(a) = 0, dann gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}\,,$$ falls der rechte Grenzwert existiert!

Bew.: 1) Es gilt: $$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}}{\dfrac{v(x)-v(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{u'(c)}{v'(k)} = \lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}\,.$$

[nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit: $(a \le c \le x) \wedge (a \le k \le x)$]

2) (**der uneigentliche Fall**): Nach Fall 1) gilt:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{u(z)}{v(z)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{u\left(\frac{1}{x}\right)}{v\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{u'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{v'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{u'\left(\frac{1}{x}\right)}{v'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{z\to\infty}\frac{u'(z)}{v'(z)}\,.$$

$$" \frac{\infty}{\infty} "$$

Seien **u** und **v** differenzierbar über] a ; b [und es gelte: $\bigwedge_{x\in]a;b[} \big(v'(x) \neq 0\big)$, und

$"\lim_{x\to a} u(x) = \infty"$ *und* $"\lim_{x\to a} v(x) = \infty"$, dann gilt: $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$, falls der rechte Grenzwert existiert!

Bew.: Sei $x_0 \in\,]a;b[$ so gewählt, daß $\mathbf{u}(x_0)$ und $\mathbf{v}(x_0)$ existieren und x_0 in der Nähe von a liegt (z.B.: $x_0 = a + h$), dann gilt für $x \in\,]a;x_0]$ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (mit $x \le c \le x_0$ und $x \le k \le x_0$) :

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0)} = \frac{u'(c)}{v'(k)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{u(x_0)}{u(x)}}{1 - \dfrac{v(x_0)}{v(x)}}\,.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(k)} \cdot \frac{1 - \dfrac{v(x_0)}{v(x)}}{1 - \dfrac{u(x_0)}{u(x)}} \qquad \underline{\textit{mit:}} \quad \lim_{x\to a}\frac{u(x_0)}{u(x)} = 0 = \lim_{x\to a}\frac{v(x_0)}{v(x)}$$

Nun soll ja $\dfrac{u'(c)}{v'(k)}$ existieren und x_0 möglichst nahe bei a gewählt sein, womit beim Grenzübergang [wegen: $(h \to 0) \wedge (x \to a) \Rightarrow (c \to a) \wedge (k \to a)$] die Behauptung folgt.