Wir basteln uns ein eigenes Nullstellenverfahren

(wozu benötigen wir ein CAS, wir haben doch unseren Kopf dabei)

Ein Kursteilnehmer hatte seinen kreativen Tag und stellte die Aufgabe, für die Funktion **f** mit:

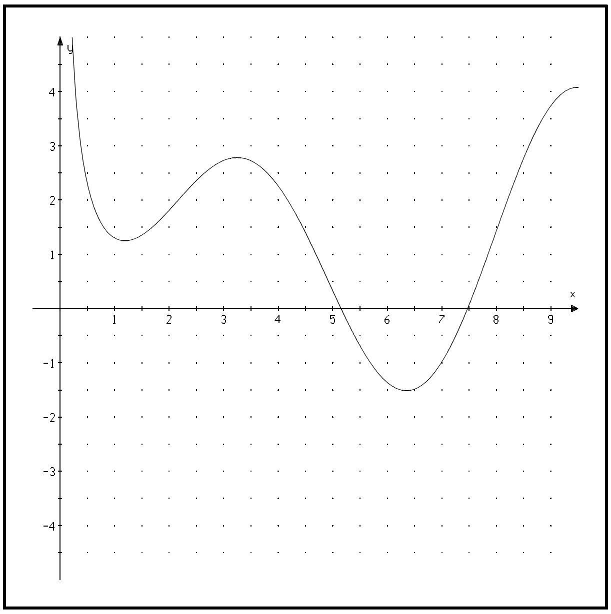
$$\mathbf{f}(x) := \frac{\sin(x)}{x^2} + 1 - \sqrt{x}\cdot\cos(x)$$

die Nullstellen zu bestimmen. - Eine Kurzanalyse des Funktionsterms ergibt schnell: $D_f = \mathbb{R}^+$, **f** ist über D_f differenzierbar und stetig, die Teilterme mit den trigonometrischen Anteilen wechseln periodisch das Vorzeichen, für kleine reelle Zahlen überwiegt der erste Teilterm, für große reelle Zahlen hat der zweite Teilterm mehr Gewicht; die zusätzliche Verschiebung um 1 in Richtung der Ordinate spielt dann keine große Rolle mehr.

Fazit: Es existieren beliebig viele Nullstellen.

Der Autor des Funktionsterms präzisierte, dass nur die kleinste Nullstelle gefordert sei. - Eine Untersuchung der Funktionswerte ergibt wiederum schnell:

x	f(x)
1	1,30116868
2	1,81584486
3	2,73039730
4	2,25998709
5	0,32735510
6	-1,35968881
7	-0,98122999



womit nach dem Zwischenwertsatz im Intervall I := [5 ; 6] mindestens eine Nullstelle existieren muß. - Da die Funktion **f** über I streng monoton fallend ist, existiert genau eine Nullstelle im betrachteten Intervall.

Aufgaben:

1. Begründe die strenge Monotonie von **f** über I nach dem globalen Monotoniesatz.

2. Ein Kursteilnehmer schlug vor, besser die Funktion $\mathbf{f_1}$ mit $\mathbf{f_1}(x) = x^2 \cdot \mathbf{f}(x)$ zu untersuchen. - Warum ist das auch möglich? - Was sind Vor- und Nachteile?

3. Der Kurs einigte sich schnell darauf,
   a) die einfache Iterationsfunktion: $\varphi(x) := \sin(x) + x^2 - \sqrt{x^5}\cdot\cos(x) + x$ zu betrachten,
   b) diese durch Subtraktion eines linearen Terms: $k \cdot x$ auf beiden Seiten zu verbessern,
   c) als Steigung k des linearen Terms nach dem Mittelwertsatz die mittlere Steigung über I zu nehmen,
   d) mit dem Anfangswert $x_0 = 5{,}5$ zu beginnen.

   Bestimme nach diesem Vorschlag zunächst den Funktionsterm der verbesserten Iterationsfunktion $\mathbf{\Phi}$.

Wir basteln uns ein eigenes Nullstellenverfahren

(wozu benötigen wir ein CAS, wir haben doch unseren Kopf dabei)

x	φ(x)	k
5	13,18387749	
6	-42,94879716	-56,13267466

$$x = \varphi(x)$$
$$x - k\cdot x = \varphi(x) - k\cdot x$$
$$(1-k)\cdot x = \varphi(x) - k\cdot x$$
$$x = \frac{1}{1-k}\cdot\left(\varphi(x) - k\cdot x\right)$$

$$\boxed{\Phi(x) := \frac{1}{57{,}13267466}\cdot\left(\sin(x) + x^2 - \sqrt{x^5}\cdot\cos(x) + 57{,}13267466\cdot x\right)}$$

n	x_n	$\Phi(x_n)$
0	5,50000000	5,13715382
1	5,13715382	5,15166864
2	5,15166864	5,15195218
3	5,15195218	5,15195668
4	5,15195668	5,15195675
5	5,15195675	5,15195675
6	5,15195675	5,15195675

n	x_n	$\Phi(x_n)$
0	5,00000000	5,14324338
1	5,14324338	5,15180041
2	5,15180041	5,15195427
3	5,15195427	5,15195671
4	5,15195671	5,15195675
5	5,15195675	5,15195675
6	5,15195675	5,15195675

Die rechte Iteration zeigt das Ergebnis mit dem Anfangswert $x_0 = 5$, womit die Konvergenz noch besser ist.

Können wir noch besser werden?

Vorschlag: Wir müssten die Steigung unseres linearen Terms zur Konvergenzverbesserung auch iterativ anpassen an das immer kleiner werdende Teilintervall um die Fixstelle, womit wir von Schritt zu Schritt einen neuen Iterationsterm einer (verbesserten) Iterationsfunktion $\boldsymbol{\Phi_k}$ erhalten.

$$\Phi_k(x) := \frac{1}{1-k}\cdot\left(\varphi(x) - k\cdot x\right)$$

4. Überlege, wie man iterativ, mit welchen Intervallgrenzen, die jeweilige mittlere Steigung bestimmt.
   Wie viele Spalten benötigst du bei dem Tabellenkalkulationsprogramm, um eine übersichtliche Iteration mit schrittweise veränderten Iterationsfunktionen darzustellen.
   Lege eine entsprechende Tabelle an und bestimme über Iterationsfunktionen $\boldsymbol{\Phi_k}$ die Fixstelle, beginnend wie zuvor mit dem Intervall I = [5 ; 6].

5. Bestimme die Nullstelle von **f** mit Hilfe des Newtonverfahrens. Vergleiche die Ergebnisse insbesondere im Hinblick auf die Konvergenzgeschwindigkeit.

Wir basteln uns ein eigenes Nullstellenverfahren

(wozu benötigen wir ein CAS, wir haben doch unseren Kopf dabei)

n	x_n	x_{n+1}	$\varphi(x_n)$	$\varphi(x_{n+1})$	k	$\Phi_k(x_{n+1})$
0	5,00000000	6,00000000	13,18387749	-42,94879716	-56,13267466	5,14324338
1	6,00000000	5,14324338	-42,94879716	5,63212908	-56,70329843	5,15171579
2	5,14324338	5,15171579	5,63212908	5,16526440	-55,10415239	5,15195728
3	5,15171579	5,15195728	5,16526440	5,15192761	-55,22698643	5,15195675
4	5,15195728	5,15195675	5,15192761	5,15195675	-55,23035943	5,15195675
5	5,15195675	5,15195675	5,15195675	5,15195675	-55,23047993	5,15195675

Der eigentliche Anfangswert ist hier $x_1 = 6$. - Dennoch ist die Konvergenzgüte durch Iteration der Steigung k des linearen Terms besser geworden.

Das Newton-Verfahren:

n	x_n	$f_1(x_n)$	$f_1'(x_n)$	$\frac{f_1(x_n)}{f_1'(x_n)}$	x_{n+1}
0	6,00000000	-48,94879716	-46,95805303	1,04239409	4,95760591
1	4,95760591	10,32253683	-49,62862122	-0,20799564	5,16560155
2	5,16560155	-0,76982845	-56,60590913	0,01359979	5,15200176
3	5,15200176	-0,00253080	-56,23161174	0,00004501	5,15195675
4	5,15195675	-0,00000003	-56,23035205	0,00000000	5,15195675
5	5,15195675	0,00000000	-56,23035204	0,00000000	5,15195675

Damit wird ersichtlich, dass wir mit unserem Verfahren eine dem Newtonverfahren vergleichbare Konvergenzgüte erreicht haben, was umso erstaunlicher ist, da wir in die Konstruktion unserer Ausgangsiterationsfunktion φ kein “Gehirnschmalz” hineingesteckt haben. ($\varphi(x) = f_1(x) + x$ hat in der Nähe der Fixstelle ein betragsmäßig großes Steigungsverhalten!) - Wenn wir da noch einen besseren Einstieg wählen?!

Aber wenn das mit der Konvergenzverbesserung so gut klappt, dann lohnt sich ein großer Aufwand zu Beginn (Steigungsverhalten bestimmen, ...) eigentlich gar nicht!

<u>Hausaufgaben:</u>

6. Bestimme die nächste Nullstelle im Intervall [7 ; 8] auf 6 Nachkommastellen genau mit Hilfe einer selbst konstruierten Iterationsfunktion.

7. Überlege, ob der Übergang von **f** zu $\mathbf{f_1}$ wirklich günstig war?! - Argumentiere in Bezug auf unser Verfahren und das Newtonverfahren.

Wir basteln uns ein eigenes Nullstellenverfahren

(wozu benötigen wir ein CAS, wir haben doch unseren Kopf dabei)

Zur Hausaufgabe (7):

n	x_n	x_{n+1}	$\varphi(x_n)$	$\varphi(x_{n+1})$	k	$\Phi_k(x_{n+1})$
0	5,00000000	6,00000000	5,32735510	4,64031119	-0,68704391	5,19404065
1	6,00000000	5,19404065	4,64031119	5,10543820	-0,57710977	5,13786038
2	5,19404065	5,13786038	5,10543820	5,16778094	-1,10969095	5,15204282
3	5,13786038	5,15204282	5,16778094	5,15186048	-1,12254724	5,15195691
4	5,15204282	5,15195691	5,15186048	5,15195656	-1,11846439	5,15195675
5	5,15195691	5,15195675	5,15195656	5,15195675	-1,11848979	5,15195675

Das Newton-Verfahren:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	6,00000000	-1,35968881	-0,85116076	1,59745242	4,40254758
1	4,40254758	1,59062832	-1,91906236	-0,82885703	5,23140461
2	5,23140461	-0,16625054	-2,06419634	0,08054008	5,15086453
3	5,15086453	0,00231420	-2,11913313	-0,00109205	5,15195658
4	5,15195658	0,00000035	-2,11848994	-0,00000017	5,15195675
5	5,15195675	0,00000000	-2,11848984	0,00000000	5,15195675

Durch das größere Krümmungsverhalten ist die Konvergenzgeschwindigkeit etwas geringer.

n	x_n	x_{n+1}	$\varphi(x_n)$	$\varphi(x_{n+1})$	k	$\Phi_k(x_{n+1})$
0	7,00000000	8,00000000	-41,08026942	99,32767775	140,40794717	7,34488901
1	8,00000000	7,34488901	99,32767775	-9,09281555	165,49942772	7,44481462
2	7,34488901	7,44481462	-9,09281555	3,62184347	127,24125348	7,47509767
3	7,44481462	7,47509767	3,62184347	7,77357754	137,09758541	7,47290454
4	7,47509767	7,47290454	7,77357754	7,46830488	139,19489110	7,47293783
5	7,47290454	7,47293783	7,46830488	7,47293248	139,03418898	7,47293787