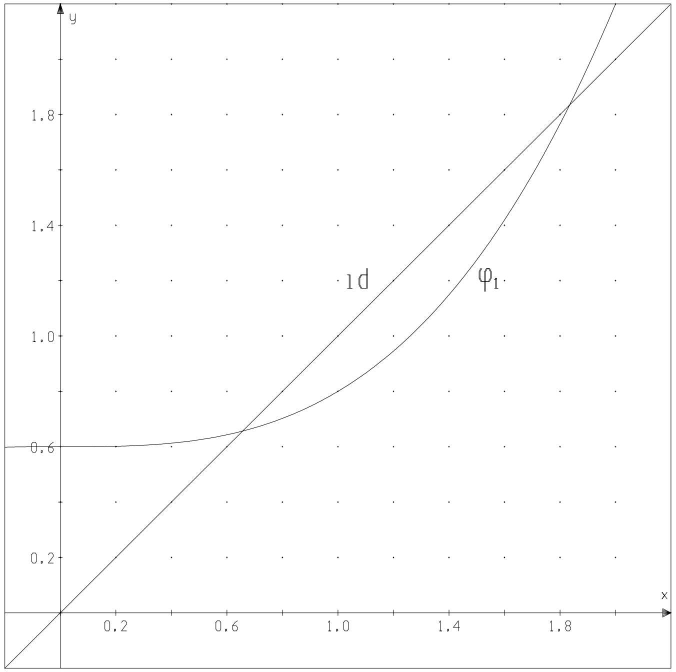
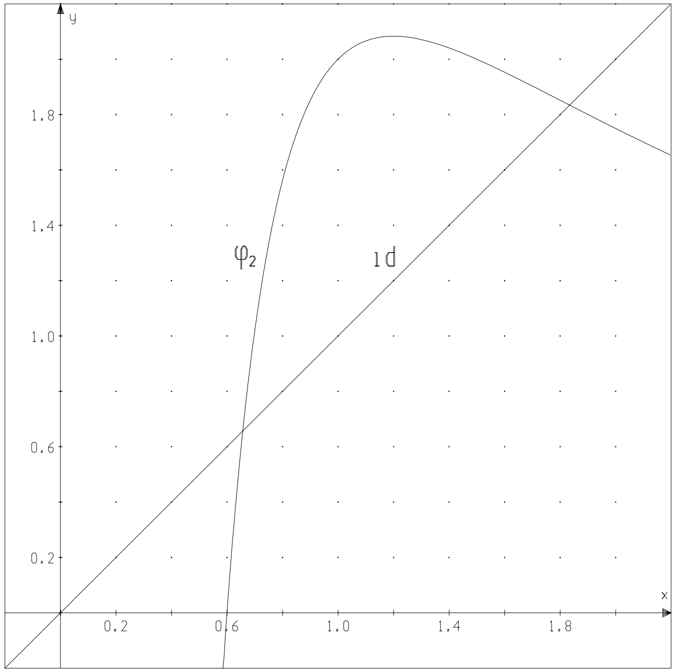
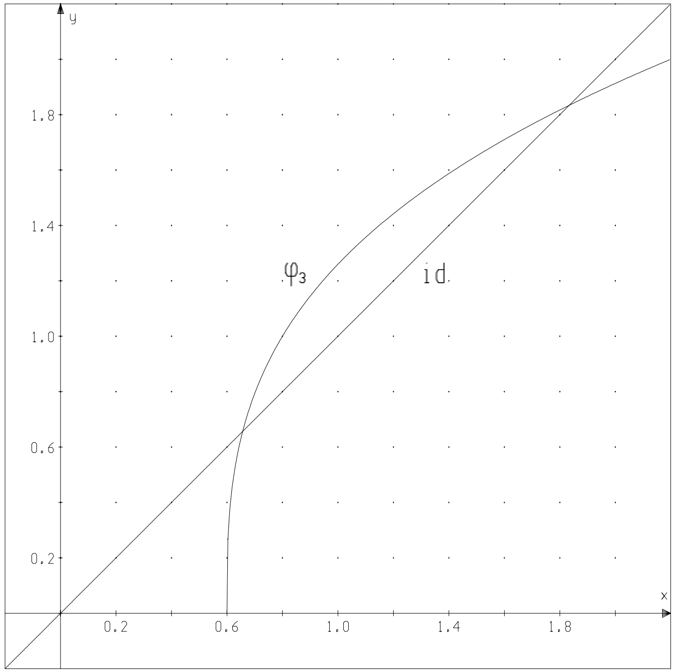
Zur Fixpunkteigenschaft von Iterationsfunktionen







Gesucht sind Lösungen der Gleichung:

$$\mathbf{x^3 - 5 \cdot x + 3 = 0}$$

Graphisch dargestellt sind die möglichen Iterationsfunktionen φ_1, φ_2, φ_3 mit:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x^3 + 3\right)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}$$

$$\varphi_3(x) = \sqrt[3]{5 \cdot x - 3}$$

Fülle die folgende Tabelle mit den entsprechenden Näherungswerten (4 Nachkommastellen) aus! - Trage danach die Werte **geeignet** in die entsprechende Graphik ein!

n	x_n	$\varphi_1(x_n)$	x_n	$\varphi_2(x_n)$	x_n	$\varphi_3(x_n)$
1	1,2000		1,2000		1,2000	
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Zur Fixpunkteigenschaft von Iterationsfunktionen

Satz: $\boldsymbol{\varphi}$ sei differenzierbar (und damit auch stetig) in $[\,a\,;\,b\,]$ und es existiere eine reelle Zahl $\mathbf{L}$ mit $0 \le \mathbf{L} < 1$, so dass gilt: $\bigwedge\limits_{x \in [a;b]} |\varphi'(x)| \le \mathbf{L} < 1$, und es gelte: $\bigwedge\limits_{x \in [a;b]} \varphi(x) \in [a;b]$, **dann** existiert genau eine Fixstelle $\mathbf{x^*} \in [\,a\,;\,b\,]$ mit $\boldsymbol{\varphi(x^*) = x^*}$ und mit einem Anfangswert $x_0 \in [\,a\,;\,b\,]$ gilt für die durch die Iterationsvorschrift $\mathbf{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$ definierte Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Beweis: a) Angenommen es gäbe zwei verschiedene Fixstellen $\mathbf{x_1^*}$ und $\mathbf{x_2^*}$ [1], dann gilt einerseits: $\dfrac{\varphi(x_2^*) - \varphi(x_1^*)}{x_2^* - x_1^*} = \dfrac{x_2^* - x_1^*}{x_2^* - x_1^*} = 1$,

andererseits gilt nach Voraussetzung und Mittelwertsatz der Differentialrechnung für ein geeignetes $c \in [\,x_1^*\,;\,x_2^*\,]$:

$$\left|\frac{\varphi(x_2^*) - \varphi(x_1^*)}{x_2^* - x_1^*}\right| = |\varphi'(c)| \le L < 1 .$$

b) Es gilt nach dem 1.Mittelwertsatz der Differentialrechnung und den Voraussetzungen:

$$|x_n - x^*| \le L \cdot |x_{n-1} - x^*| \le L^2 \cdot |x_{n-2} - x^*| \le L^3 \cdot |x_{n-3} - x^*| \le \ \ldots \ \le L^n \cdot |x_0 - x^*|$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} |x_n - x^*| = |x_0 - x^*| \cdot \lim_{n \to \infty} L^n = |x_0 - x^*| \cdot 0 = 0 .$$

---

1) o.B.d.A.: $x_1^* < x_2^*$

Zur Fixpunkteigenschaft von Iterationsfunktionen

Der Iterationsterm des einfachen Newton-Verfahrens lautet: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$, d.h. man kann das einfache Newton-Verfahren als Iterationsfunktion

φ mit der Funktionsgleichung: $\boxed{\varphi(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$ auffassen.

Bestätige, dass gilt: $\boxed{\varphi'(x) = \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{\left(f'(x) \right)^2}}$ und erläutere, welche (graphischen) Bedingungen f in der Nähe der Nullstelle erfüllen sollte, damit $\left| \varphi'(x) \right|$ möglichst klein ist.

Es sei $$\mathbf{f}(x) = x^3 - 5 \cdot x + 3$$

Bestimme den zugehörigen Funktionsterm der Iterationsfunktion φ, die dem einfachen Newton-Verfahren entspricht und bestimme mit dieser Iterationsfunktion die Fixstelle x^* aus dem Anfangswert $x_0 = 1{,}2$.

Überprüfe die numerische Vorgehensweise mit Hilfe der nebenstehenden Graphik. - Erläutere, warum $x_0 = 1{,}2$ eigentlich kein besonders guter Anfangswert ist.

Welche Bedeutung hat die Stelle: $\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1{,}2910$ für die Funktionen $\mathbf{f}$ und $\boldsymbol{\varphi}$?