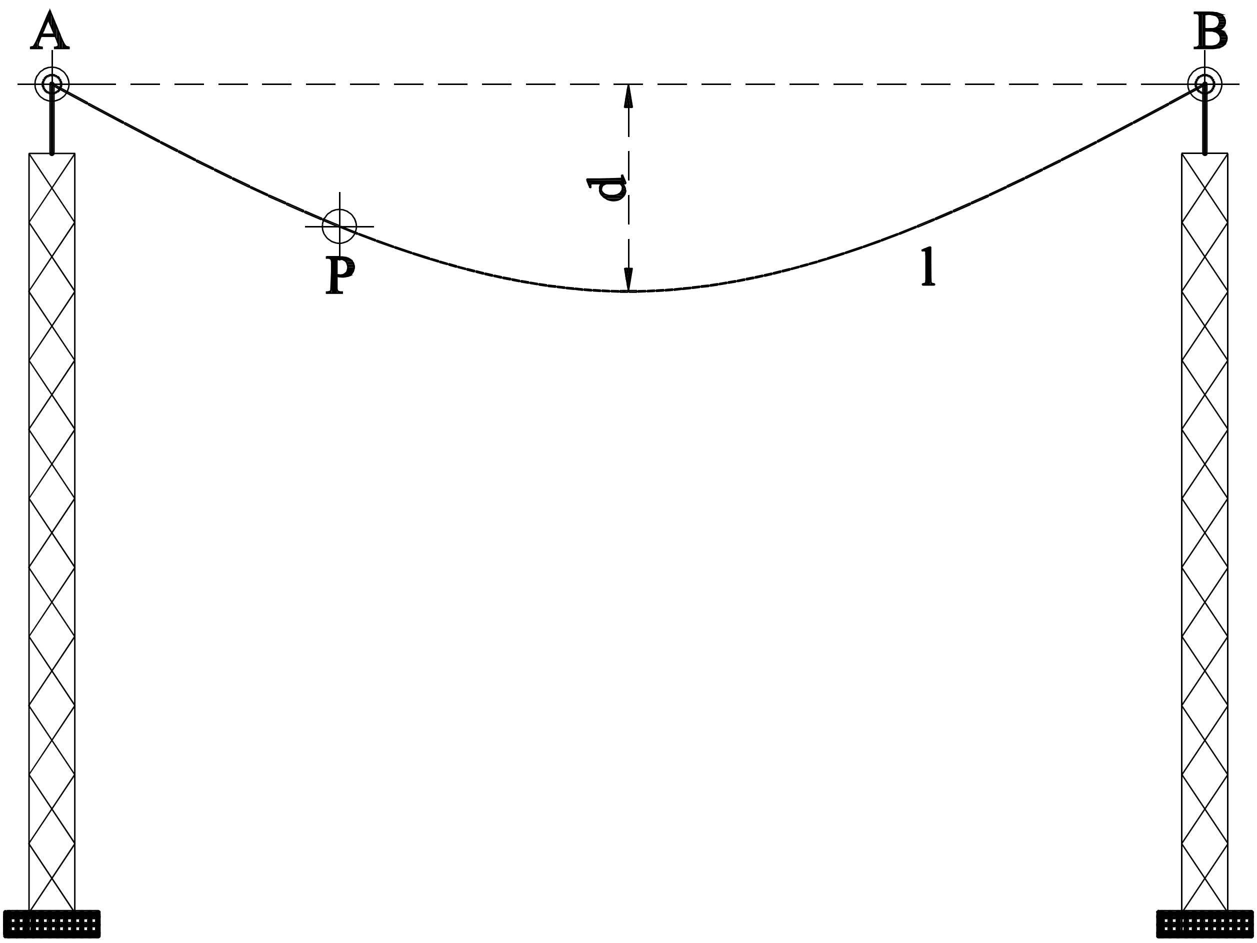
Die Kettenlinie



Zwischen 2 Masten sei ein Kabel der Länge **l** gespannt, wobei natürlich für die Größe des Abstandes der Masten gilt: $\overline{\mathbf{AB}} < \mathbf{l}$

<u>Fragen:</u>

(1) Wie weit hängt das Kabel durch ? (**d** = ?)
(2) Wie groß ist die Seilspannung in einem Punkt **P** des Kabels ?
(3) Wie lautet die Funktionsgleichung einer Funktion **f**, welche die Kurve beschreibt ? - Existiert überhaupt eine Funktion **f**, welche die Kurve beschreibt ?

<u>Bekannte Größen:</u>

(1) Die Länge **l** des Kabels,
(2) der Abstand $\overline{\mathbf{AB}}$ der Masten,
(3) die Masse **m** des Kabels, das homogen ist.

Quelle: Ulrich Uffrecht: Die Kettenlinie; MNU, 30.Jahrgang 1977, Heft 5

Die Kettenlinie

Die experimentelle (Teil-) Lösung:

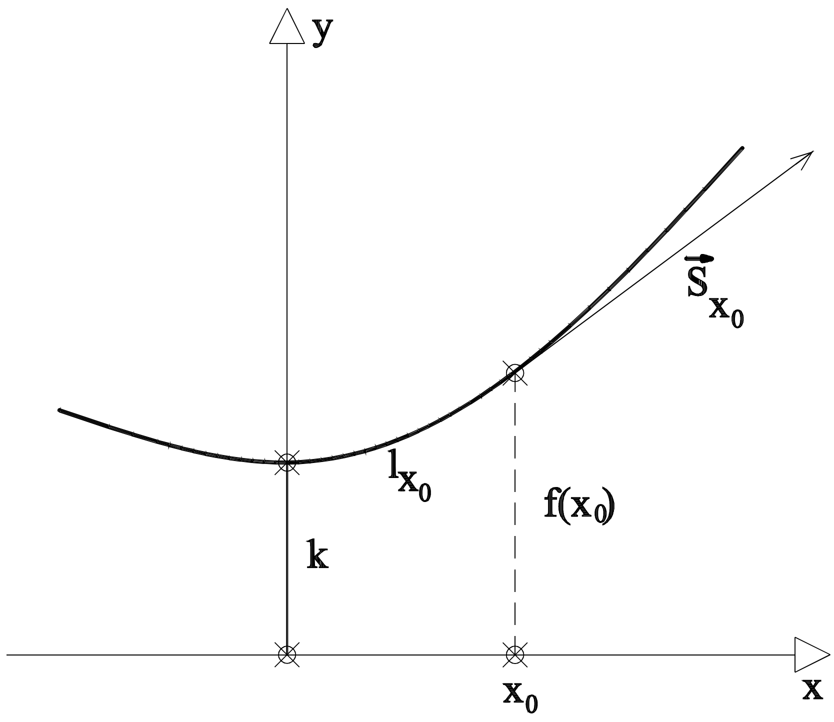
Es steht zur Verfügung eine 2,66 m lange Stöpselkette aus einem Installationsgeschäft. Wir nehmen als Aufhängepunkte **A** und **B** in unserer Modellbildung zwei geeignete Aufhängepunkte gleicher Höhe mit einem Abstand von z.B.: 2 m (übliche Tafelbreite). Wir bestimmen durch Messung:

d ≈ **m** ≈ $\mathbf{S_A}$ ≈

(Zur Bestimmung von **m** und $\mathbf{S_A}$, der Seilspannung im Aufhängepunkt, geeignete Messgeräte aus der Physik verwenden - Unbedingt nach Aufhängen der Kette warten, bis alle Kettenglieder zur Ruhe gekommen sind !)

Aufgabe: Bestimme durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems und der Koordinaten von 3 (signifikanten) Punkten den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 2. Grades und überprüfe durch Einsetzen in diesen Funktionsterm, ob diese Parabel den Kurvenverlauf sinnvoll beschreibt.

Die mathematische (Modell-) Lösung:



Wir legen unser Koordinatensystem so fest, dass die y-Achse durch den Scheitelpunkt verläuft. Es seien folgende Bezeichnungsweisen vereinbart:

$\mathbf{S_{x_0}}$: Größe der Seilspannung im Punkt (x_0 | $f(x_0)$)

$\mathbf{S_0}$: Größe der Seilspannung im Scheitelpunkt

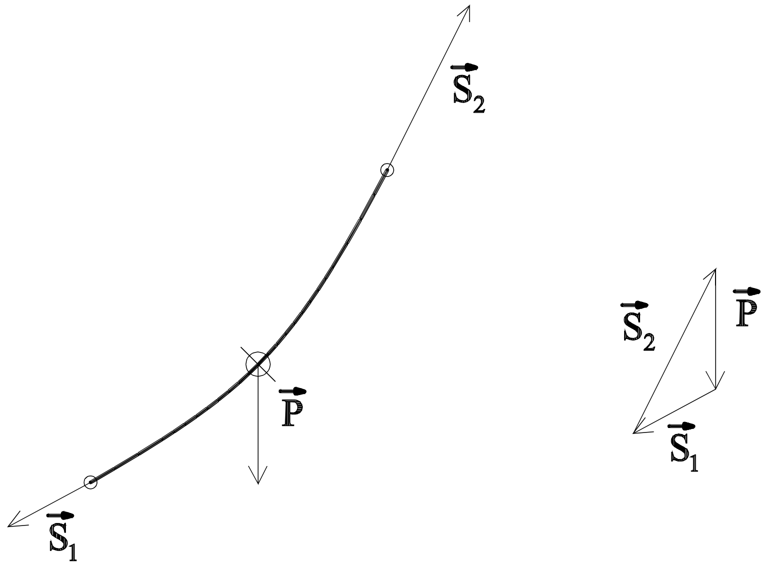
$\mathbf{l_{x_0}}$: Seillänge von 0 bis x_0

$\mathbf{P_{x_0}}$: Gewichtskraftsgröße des Seilstückes der Länge $\mathbf{l_{x_0}}$

$\boldsymbol{\lambda}$: Masse pro Längeneinheit

Die Kettenlinie

Ansatzgedanke: Wenn die Lage jedes Massenelementes der Kette stabil ist, d.h die Kette bewegt sich nicht, dann muss Kräftegleichgewicht für jedes Kettenstück der Länge **l** bestehen.

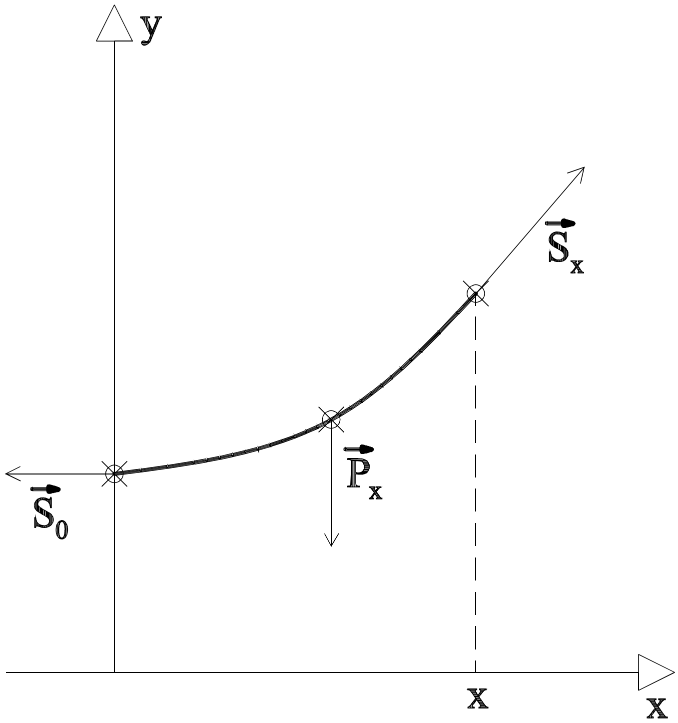


Aufgabe:

Bestätige für den Fall des Scheitelpunktes durch geeignetes Kräfteparallelogramm, dass die folgenden Gleichungen richtig sind:[1]

$$(1) \quad \tan(\alpha) = f'(x) = \frac{P_x}{S_0}$$

$$(2) \quad P_x = \lambda \cdot g \cdot l_x$$



Damit ergibt sich die folgende (Integral-) Gleichung, die als Bestimmungsgleichung für eine gesuchte Funktion **f** angesehen werden kann:

$$l_x = \int_0^x \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \cdot dx = \frac{P_x}{\lambda \cdot g} = \frac{S_0}{\lambda \cdot g} \cdot f'(x)$$

---

[1] Der Einfachheit halber, ist die Stelle auf der x-Achse auch mit **x** bezeichnet.

Die Kettenlinie

Aufgabe: Begründe die folgenden Umformungsschritte:

$$\int_0^x \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \cdot dx = \frac{S_0}{\lambda \cdot g} \cdot f'(x)$$

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \frac{S_0}{\lambda \cdot g} \cdot f''(x)$$

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = \left(\frac{S_0}{\lambda \cdot g}\right)^2 \cdot \left(f''(x)\right)^2$$

$$2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) = \left(\frac{S_0}{\lambda \cdot g}\right)^2 \cdot 2 \cdot f''(x) \cdot f'''(x)$$

$$f'''(x) = \left(\frac{\lambda \cdot g}{S_0}\right)^2 \cdot f'(x)$$

$$f'''(x) = c^2 \cdot f'(x)$$

mit $c := \frac{\lambda \cdot g}{S_0}$.

Aufgabe: Begründe, dass die allgemeine Lösung der letzten Differentialgleichung lautet:

$$f(x) = K_1 \cdot e^{c \cdot x} + K_2 \cdot e^{-c \cdot x} + K_3$$

(mit geeigneten reellen Konstanten K_1, K_2 und K_3).

Bestimmung der Konstanten:

Wenn man das Koordinatensystem geeignet wählt, kann $K_3 = 0$ gesetzt werden und wegen $f'(0) = 0$ gilt:

$$K_1 = K_2 =: K ,$$

womit sich die Funktionsgleichung vereinfacht zu: $f(x) = K \cdot \left(e^{c \cdot x} + e^{-c \cdot x} \right)$.

Verwende die 3. Zeile der obigen Umformung: $c^2 \cdot \left(1 + \left(f'(x)\right)^2 \right) = \left(f''(x)\right)^2$,

um durch Einsetzen zu bestätigen, dass gilt: $f(x) = \frac{1}{2 \cdot c} \cdot \left(e^{c \cdot x} + e^{-c \cdot x} \right)$

Mit $f(0) = \mathbf{k} = \frac{1}{c} = \frac{S_0}{\lambda \cdot g}$ ergibt sich:

$$\boxed{f(x) = k \cdot \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2} = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right)}$$

Die Kettenlinie

Aufgabe: Bestätige durch Integration, dass sich damit für die Bogenlänge ergibt:

$$l_x = k \cdot \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} = k \cdot \sinh\left(\frac{x}{k}\right).$$

Diese Gleichung ist, bei vorgegebener (Ketten- /) Bogenlänge und vorgegebenem Ort x eine Bestimmungsgleichung für die Konstante **k**.

Aufgabe: Fertige eine geeignete Kalkulation zur Nullstellenbestimmung der Funktion **g** mit:

$$\mathbf{g}(k) = l_x - k \cdot \sinh\left(\frac{x}{k}\right)$$ an.

Eingabefelder sollen für l_x und x vorgesehen werden.

$\mathbf{l_x =}$	1,330
x =	1,000

n	$\mathbf{k_n}$	$\mathbf{g(k_n)}$	$\mathbf{g'(k_n)}$	$\mathbf{k_{n+1}}$
1	1,00000000	0,15479881	0,36787944	0,57921322
2	0,57921322	-0,24630670	2,28424476	0,68704173
3	0,68704173	-0,06243207	1,26273942	0,73648349
4	0,73648349	-0,00687232	0,99875008	0,74336441
5	0,74336441	-0,00010607	0,96813608	0,74347397
6	0,74347397	-0,00000003	0,96765901	0,74347400
7	0,74347400	0,00000000	0,96765890	0,74347400
8	0,74347400	0,00000000	0,96765890	**0,74347400**

Im Prinzip ist nun alles klar, wir müssen nur noch die Ergebnisse zusammenführen.

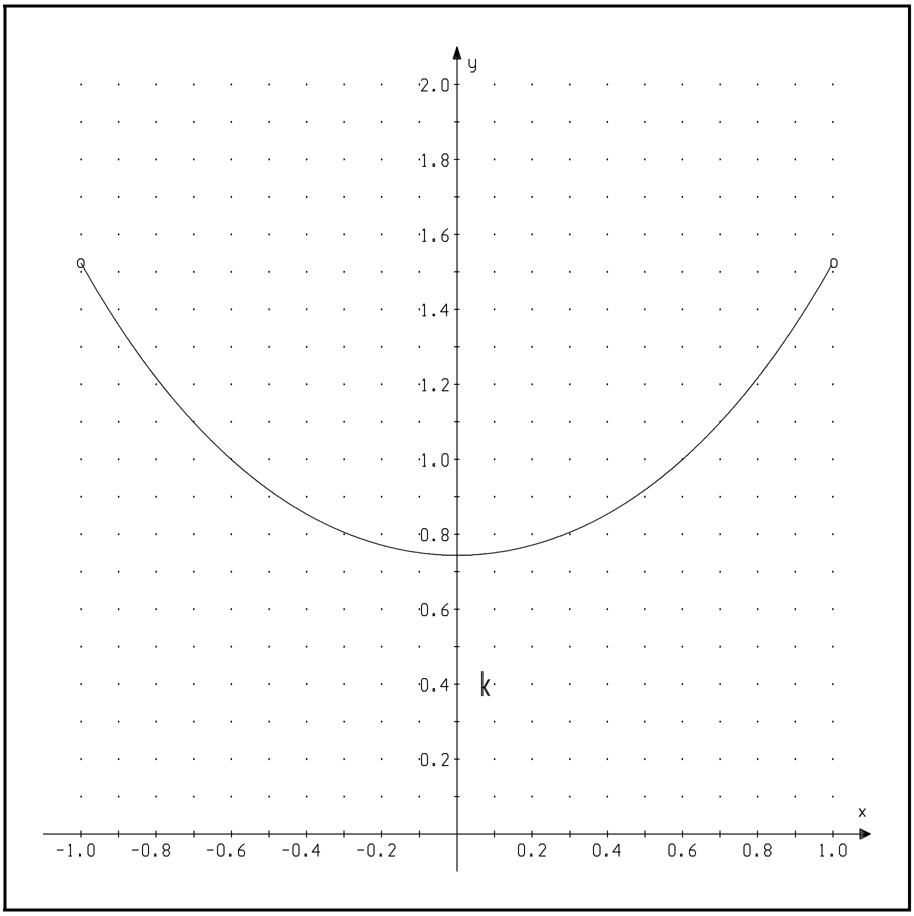
Aufgabe: Begründe die folgenden Umformungsschritte unter Berücksichtigung früherer Beziehungen.

$$f(x) = d + k = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$= k \cdot \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{x}{k}\right)\right)^2}$$

$$= k \cdot \sqrt{1 + \frac{l_x^2}{k^2}} = \sqrt{k^2 + l_x^2}$$

Die Kettenlinie



Es gilt: $d = \sqrt{l_x^2 + k^2} - k$ und $S_0 = k \cdot \lambda \cdot g$.

Aufgabe: Begründe die folgenden Umformungsschritte unter Berücksichtigung früherer Beziehungen.

$$S_x = \frac{S_0}{\cos(\alpha)} = S_0 \cdot \sqrt{1 + (\tan(\alpha))^2} = S_0 \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} = S_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{x}{k}\right)\right)^2}$$

$$= S_0 \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \lambda \cdot g \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \lambda \cdot g \cdot f(x)$$

Vergleich der experimentellen und der mathematischen Lösung:

Aufgabe: Berechne **d** und $\mathbf{S_A}$ und vergleiche mit den gemessenen Werten!

Musterlösung:

Länge der Stöpselkette: 2,66 m; Abstand der Aufhängepunkte: 2 m; $\lambda \approx 22{,}56\ \frac{g}{m}$.

d ≈ 78,0 cm ; $\mathbf{S_0} \approx 0{,}1645$ N ; $\mathbf{S_1} \approx 0{,}3372$ N