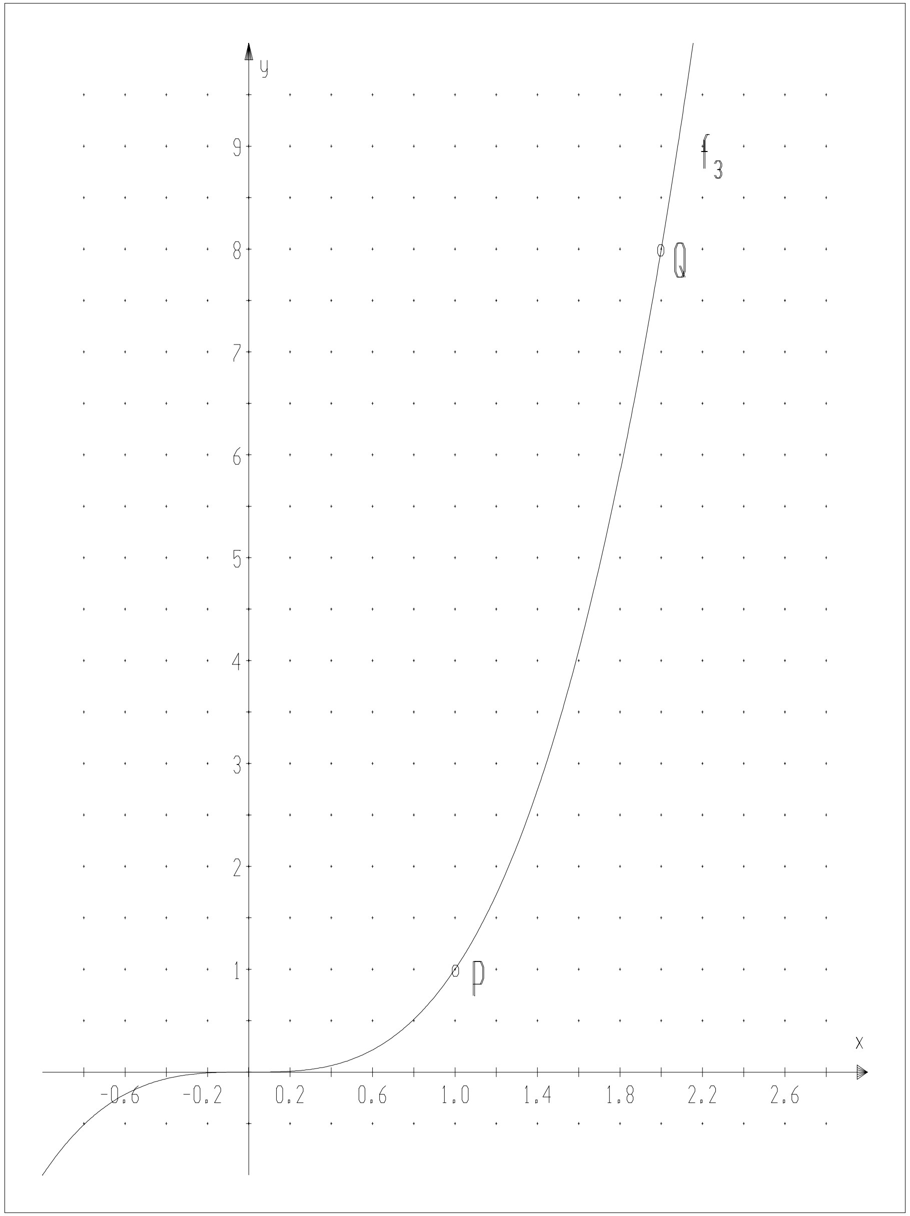
Zur Krümmung einer Funktion in einem Punkt P(x_0 | $f(x_0)$) des Graphen

Nebenstehend ist ein Ausschnitt des Graphen der 3. Potenzfunktion skizziert.



<u>Aufgaben:</u> a) Bezeichne die Punkte **P** und **Q** mit den zugehörigen Punktkoordinaten.

b) Bestimme: $\mathbf{f_3}''(1)$ und $\mathbf{f_3}''(2)$.

Bekanntlich geben die Funktionswerte der 1. Ableitungsfunktion einer Funktion den Wert der lokalen Änderungsrate der Funktionswerte, d.h. das Steigungsverhalten des Graphen im betrachteten Punkt (Steigung der Tangente) an.

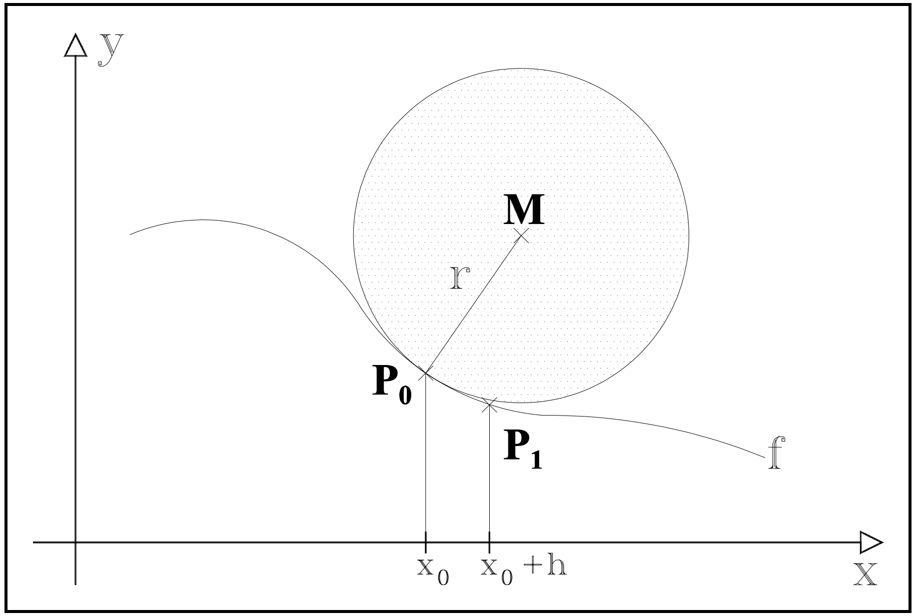
Demnach geben die Funktionswerte der 2. Ableitungsfunktion einer Funktion den Wert der lokalen Änderungsrate der Funktionswerte der Ableitungsfunktion, d.h. das Steigungsverhalten des Steigungsverhaltens des Graphen im betrachteten Punkt (lokale Änderungsrate der Steigung der Tangente) an.
Die lokale Änderungsrate des Steigungsverhaltens wurde zu Beginn der Einführung in die Differentialrechnung (11. Klasse) als Krümmungsverhalten einer Funktion charakterisiert.

Aufgrund des optischen Eindrucks der rechten Graphik: In welchem der gekennzeichneten Punkte würdest du die Krümmung als größer bezeichnen? (Unterschiedlichen Achsenmaßstab beachten!) - Entspricht deine Einschätzung den Ergebnissen von Aufgabe b)?

Offensichtlich ist das Krümmungsverhalten einer Funktion durch die Funktionswerte der 2. Ableitungsfunktion noch nicht vollständig beschrieben, denn über gleich großen Intervalllängen auf der x-Achse können die Funktionswerte unterschiedlich stark wachsen, d.h. die Länge des betrachteten Funktionsgraphen ist unterschiedlich groß!

Welche geometrische Figur ist nach deiner Vorstellung ideal gleichmäßig gekrümmt?

Zur Krümmung einer Funktion in einem Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ des Graphen



Unter der Krümmung einer Funktion in einem Punkt ihres Graphen versteht man den Kehrwert des Radius des *Krümmungskreises* (siehe Skizze).

Um den Radius des Krümmungskreises zu bestimmen, benötigt man die Koordinaten seines Mittelpunktes **M**. Mit den Koordinaten des Punktes $\mathbf{P_0}$ ergibt sich **r** dann unter Verwendung des Satzes des Pythagoras.

M bestimmt man nun über den Schnitt zweier Geraden $\mathbf{g_0}$ und $\mathbf{g_1}$, die die jeweiligen Normalen der Tangenten $\mathbf{t_0}$ und $\mathbf{t_1}$ in den Punkten $\mathbf{P_0}$ und $\mathbf{P_1}$ sind mit anschließender Grenzwertbetrachtung ($h \to 0$).

***Damit ist alles klar*!?**

Bitte bei der Rechnung alle benötigten Voraussetzungen notieren!

<u>Aufgabe:</u> Bestätige, dass für die Krümmung $\boldsymbol{k(x_0)}$ im Punkt $\mathbf{P(x_0 \mid f(x_0))}$ einer mindestens zweimal differenzierbaren Funktion **f** gilt:

$$k(x_0) := \frac{\left| f''(x_0) \right|}{\sqrt{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^3}} \; ! \;^{1)}$$

Wann ‘klappt’ das Verfahren nicht? - Was bedeuten diese Fälle dann in der graphisch-geometrischen Interpretation ? - Welche Bedeutung hat der Nennerterm ?
Bestimme die Größe der Krümmung an geeigneten (selbstgewählten) Stellen von Standardfunktionen wie: Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen, Wachstumsfunktionen etc.; **z.B.:** Wie groß ist die Krümmung im absoluten Minimum der Funktion **f** mit **f**(x) = x^x ?

---

[1] <u>Beachte:</u> Durch das Steigungsdreieck der Strecke $\mathbf{P_0M}$ lassen sich evtl. Koordinaten von **M** wieder durch $\mathbf{f'(x_0)}$ ausdrücken. Es gilt: $-\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y_M - f(x_0)}{x_M - x_0}$