Kurven 2. Ordnung und Bilinearformen

Durch Basistranformationen im zugehörigen Vektorraum wird Vieles leichter

Im Vektorraum V := $\mathbb{R}^2$ betrachten wir das Standardskalarprodukt: $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$, das bekanntlich als eine Abbildung: $V \times V \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden kann. - Wir wollen nun das Skalarprodukt durch eine lineare Abbildung "stören", d.h. wir wollen zunächst einen der beiden Vektoren mit einer Matrix **A** abbilden, und dann erst das Skalarprodukt bilden.

Das könnte so: $\vec{x} \bullet (\mathbf{A} \circ \vec{y})$ oder so $(\mathbf{A} \circ \vec{x}) \bullet \vec{y}$ aussehen. Eine solche Abbildung, die zwei Vektoren ein in dieser Form "gestörtes" Skalarprodukt zuordnet, nennt man Bilinearform.

<u>Bestätigen Sie:</u>

$$\vec{x} \bullet \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \vec{y} \right] = a \cdot x_1 \cdot y_1 + b \cdot x_1 \cdot y_2 + c \cdot x_2 \cdot y_1 + d \cdot x_2 \cdot y_2$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \vec{x} \right] \bullet \vec{y} = a \cdot x_1 \cdot y_1 + b \cdot x_2 \cdot y_1 + c \cdot x_1 \cdot y_2 + d \cdot x_2 \cdot y_2$$

Damit das Ergebnis in beiden Fällen dasselbe ist sind für uns nur diejenigen Matrizen von Interesse, für die b = c ist, d.h. durch Vertauschung von Zeilen und Spalten ändert sich nichts (**A** = $\mathbf{A^T}$ - transponierte Matrix) bzw. durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen bleibt **A** unverändert (Symmetrie).

<u>Beispiel:</u>

$$\mathbf{A} := \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{pmatrix}$$

Ein Skalarprodukt ist positiv definit, also: $\bigwedge_{\vec{x} \in V} \vec{x} \bullet \vec{x} \geq 0 \ ; \quad \vec{x} \bullet \vec{x} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{x} = \vec{o}$, und diese Eigenschaft wollen wir auch für eine Bilinearform fordern.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x \cdot y + d \cdot y^2$$

<u>im Beispiel:</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \left[\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \frac{89}{25} \cdot x^2 - \frac{96}{25} \cdot x \cdot y + \frac{61}{25} \cdot y^2$$

Fragt man sich nun, welche Punktmenge geometrisch durch alle Vektoren beschrieben wird, für die das Skalarprodukt mit sich selbst konstant ist, z.B.: $\vec{x} \bullet \vec{x} = 1$, so wird durch diese vektorielle Gleichung bekanntlich ein Ursprungskreis mit dem Radius 1 beschrieben. - Und was beschreibt:

$$\boxed{\vec{x} \bullet (\mathbf{A} \circ \vec{x}) = 1} \ ?$$

In unserem Beispiel heißt das: $\frac{89}{25} \cdot x^2 - \frac{96}{25} \cdot x \cdot y + \frac{61}{25} \cdot y^2 = 1$

oder: $\boxed{89 \cdot x^2 - 96 \cdot x \cdot y + 61 \cdot y^2 - 25 = 0}$

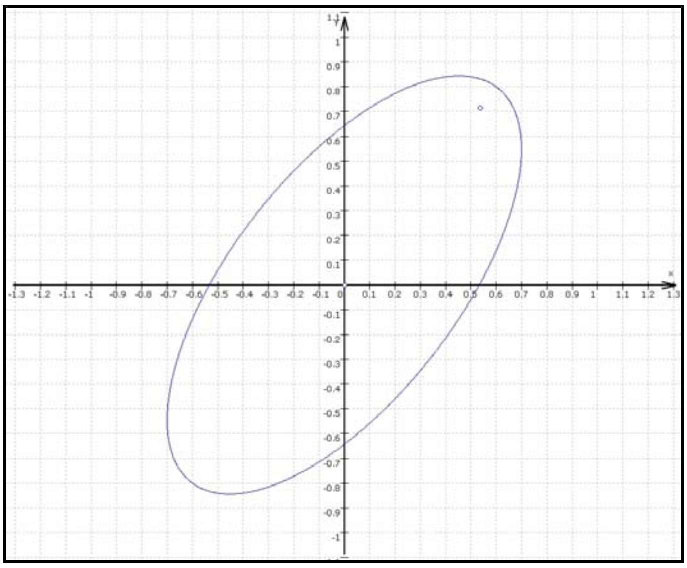
Das ist die Mittelpunktsgleichung einer Kurve 2. Ordnung in der affinen Ebene!

Im Sinne der affinen Geometrie könnte man nun als Transformation eine geeignete Drehung suchen, damit in der Gleichung:

$$89 \cdot x^2 - 96 \cdot x \cdot y + 61 \cdot y^2 - 25 = 0$$

kein gemischtes Glied mehr auftritt. Betrachtet man jedoch die Problemstellung aus der Sicht des zugehörigen Vektorraumes, so könnte man auch eine neue Basis (statt der kanonischen Basis) suchen, so dass die Koordinatenachsen auf den Hauptachsen der Ellipse liegen. Dieses Vorgehen heißt:

Hauptachsentransformation.



Für unsere neuen Basisvektoren muss gelten: Die Richtungen, die geometrisch durch sie beschrieben werden, sollen durch die Matrix **A** nicht verändert werden, d.h. es sind Vektoren $\vec{v} \in V$ gesucht für die gilt:

$$\boxed{\mathbf{A} \circ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \circ \vec{v} = \vec{o}} \qquad ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösungen der obigen Vektorgleichung gilt: λ heißt Eigenwert, $\vec{v}$ Eigenvektor zur Matrix **A**.

$\vec{v}$ ist demnach ein Element des Kerns der linearen Abbildung: ($\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$), und das Problem ist nur dann sinnvoll lösbar, wenn der Rang der Matrix ($\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$) kleiner ist als die Dimension von V.

Aufgabe:

Zeigen Sie: $\mathbf{A} := \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{pmatrix}$

besitzt die Eigenwerte:[1] $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 1$,

zugehörige Eigenvektoren lauten: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Selbstverständlich ist jedes Vielfache $k \cdot \vec{v}$ eines Eigenvektors auch Eigenvektor ($k \neq 0$), denn es werden ja nur abbildungstreue Richtungen beschrieben, und möchte man nun einen neue normierte Basis haben, so wird man für V statt der kanonischen Basis die Basis:

$$\mathbf{B}^* := \left\{ \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} ; \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{nehmen.}$$

---

[1] Beachten Sie: Weil der Rang der Matrix ($\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$) kleiner als die Dimension von V ist, ist der Wert der zugehörigen Determinante 0.

Kurven 2. Ordnung und Bilinearformen

Durch Basistranformationen im zugehörigen Vektorraum wird Vieles leichter

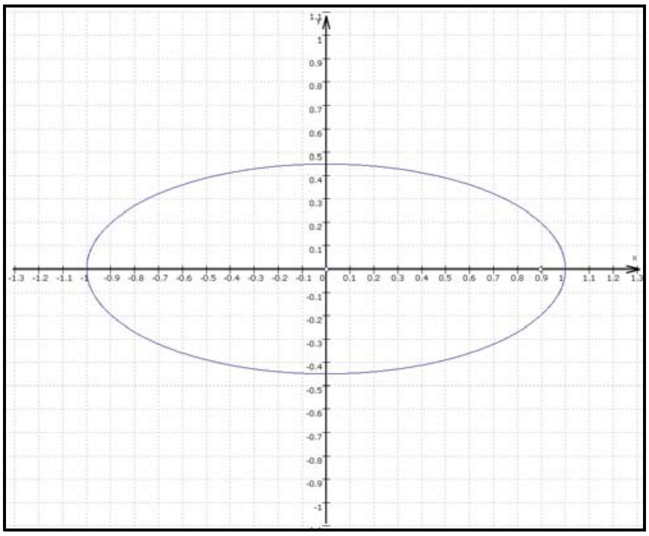
Wir definieren als Transformationsmatrix eine Matrix, deren Spalten aus den Eigenvektoren von **A** besteht,

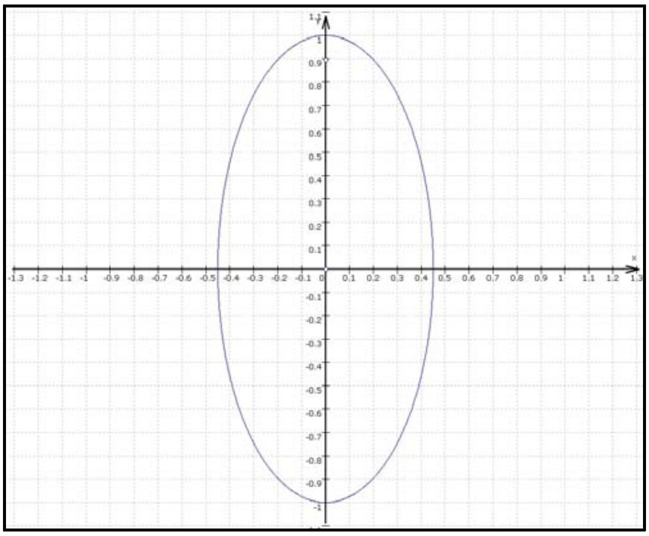
also entweder: $\mathbf{T} := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ oder $\mathbf{T} := \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe: Bestimmen Sie in beiden Fällen die inverse Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ (was fällt auf ?) und bestätigen Sie für die (basis-) transformierte Matrix $\mathbf{A}^* := \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{T}$:

$$\mathbf{A}^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}^* := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die zugehörigen Gleichungen der Kurve 2. Ordnung an!





Hausaufgabe:

Mit der Matrix $\mathbf{A} := \frac{1}{5200} \begin{pmatrix} 289 & -54 \\ -54 & 244 \end{pmatrix}$ werde über die Gleichung $\vec{x} \bullet (\mathbf{A} \circ \vec{x}) = 1$ eine Kurve in der affinen Ebene beschrieben.

– Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Kurve an (der Einsatz eines geeigneten Plot-Programms ist zulässig).

– Führen Sie eine Hauptachsentransformation für diese Bilinearform durch, d.h. bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren.

– Bestimmen Sie die auf die Hauptachsen transformierten Matrizen $\mathbf{A}^*$ (2 Möglichkeiten) und geben Sie die zugehörigen Gleichungen der Kurven 2. Ordnung an.

Quelle: Benno Artmann: Lineare Algebra; Birkhäuser Skripten