Kurven 2. Ordnung in der affinen Ebene

Durch Transformationen wird Vieles leichter

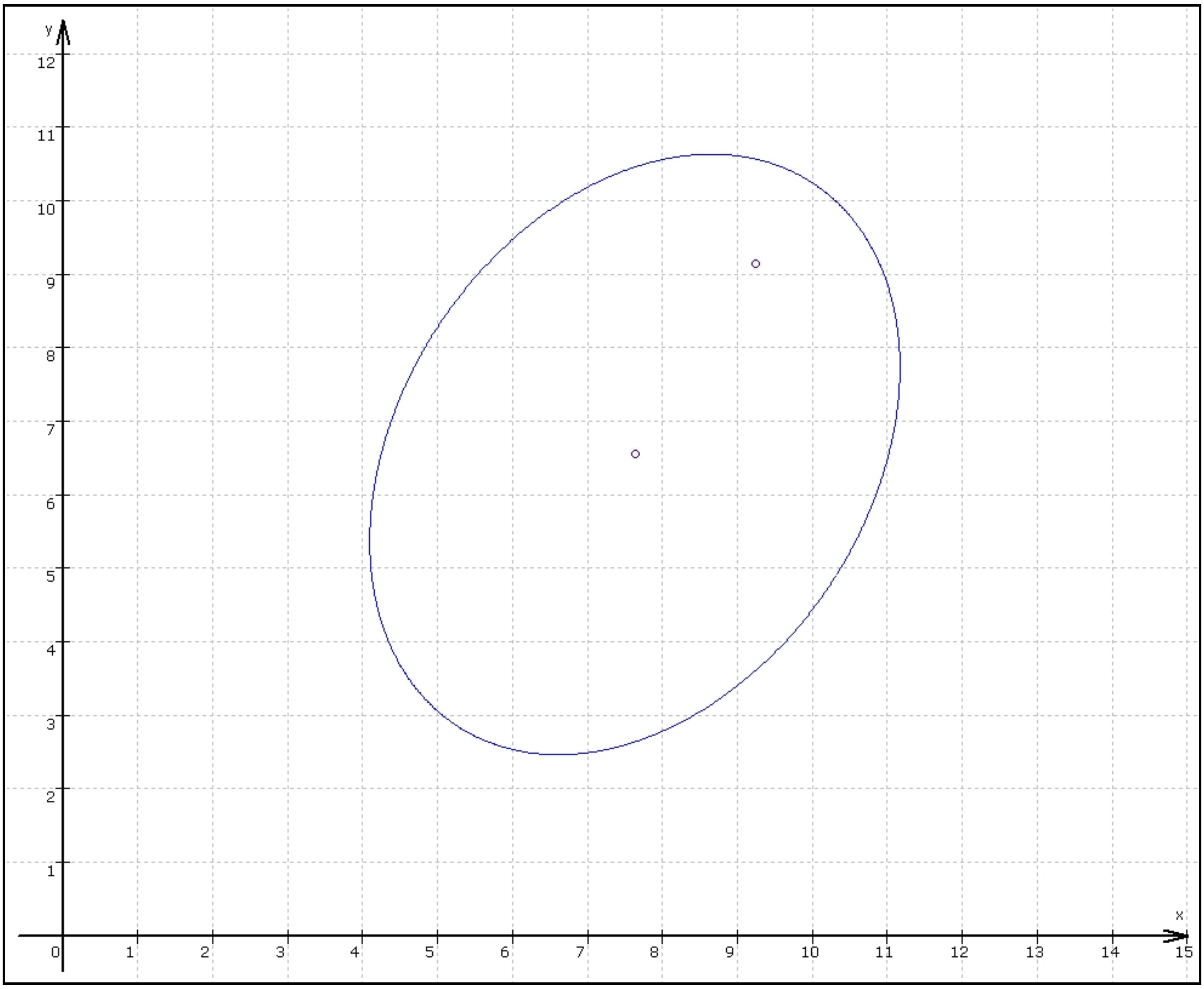
Durch die Gleichung: $x^2 + y^2 - 25 = 0$ wird in der affinen Ebene bekanntlich ein Ursprungskreis mit dem Radius $r = 5$ beschrieben.

Doch was ist die geometrische Interpretation einer Gleichung in 2 Variablen, die außer rein quadratischen Summanden noch Summanden eines gemischten Produktes und lineare Terme aufweist, wobei die einzelnen Summanden auch mit reellen Zahlen multipliziert sein können, d.h. die allgemeine Form lautet:

$$\boxed{A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0} \qquad A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$$

<u>Beispiel:</u> $4 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 48 \cdot x - 24 \cdot y + 216 = 0$

Der Einsatz eines geeigneten Graphikprogramms[1] ergibt einen ersten Eindruck. Der Graph sieht aus wie eine Ellipse, jedoch nicht in Mittelpunktslage und im Koordinatensystem gedreht.

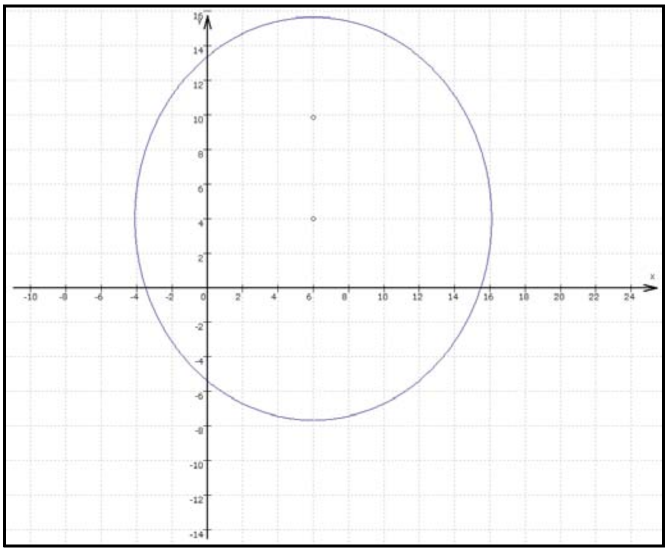


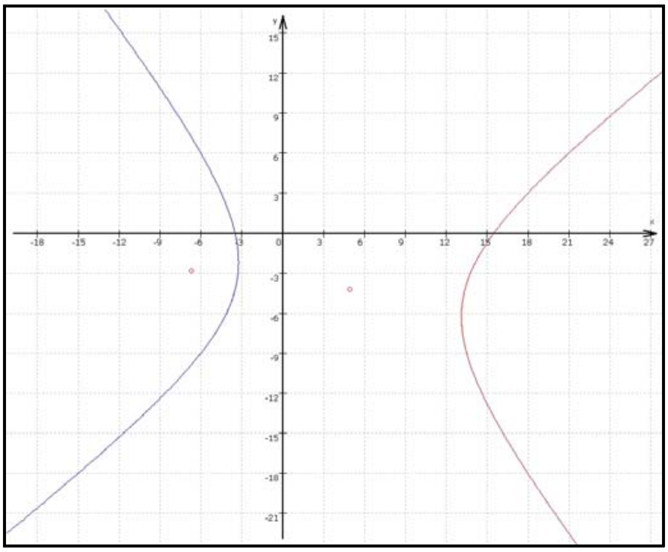
Durch Veränderung der Koeffizienten wollen wir zunächst die Auswirkungen der einzelnen Summanden auf

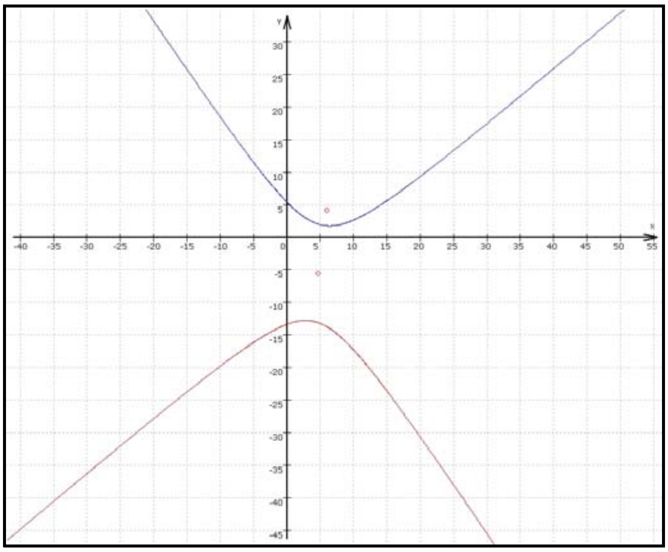
---

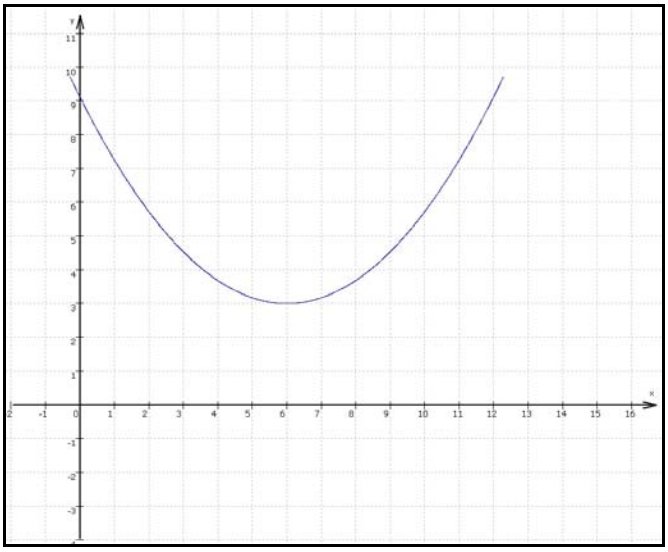
1 Hier wurde das Programm “Winfunktion” verwendet.

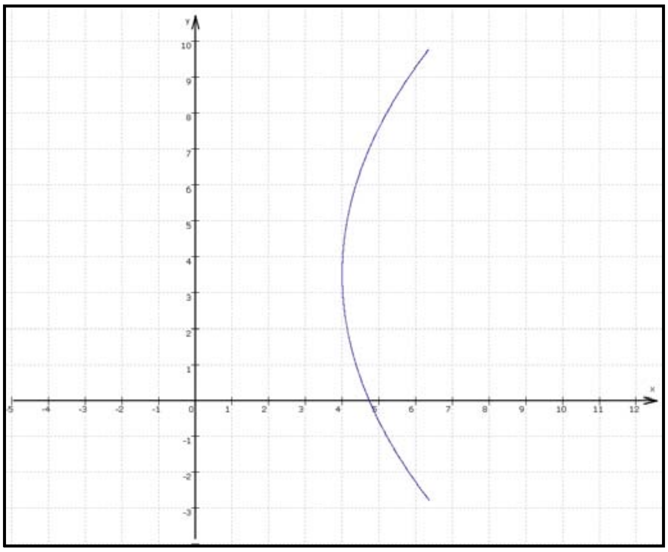
das graphische Ergebnis untersuchen. Aus Untersuchungen in früheren Klassenstufen ist uns bekannt, dass die linearen Terme sich auf die Verschiebung des Mittelpunktes auswirken, während die unterschiedlichen Koeffizienten vor den quadratischen Termen evtl. etwas mit dem Übergang: Kreis → Ellipse (→ Hyperbel; Vorzeichenwechsel) zu tun haben. - Aber was sind insbesondere die Auswirkungen des Summanden mit dem gemischten Produkt?!

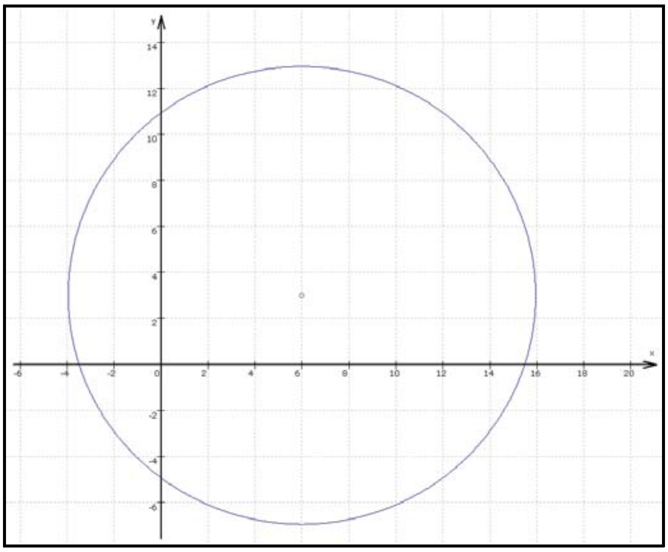






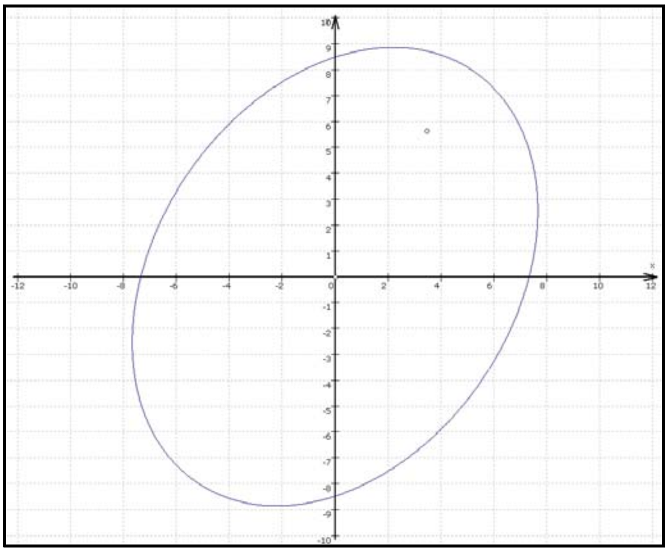


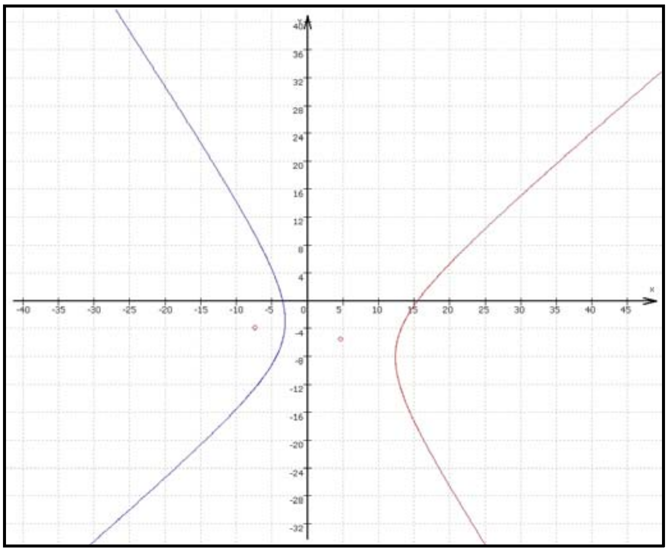


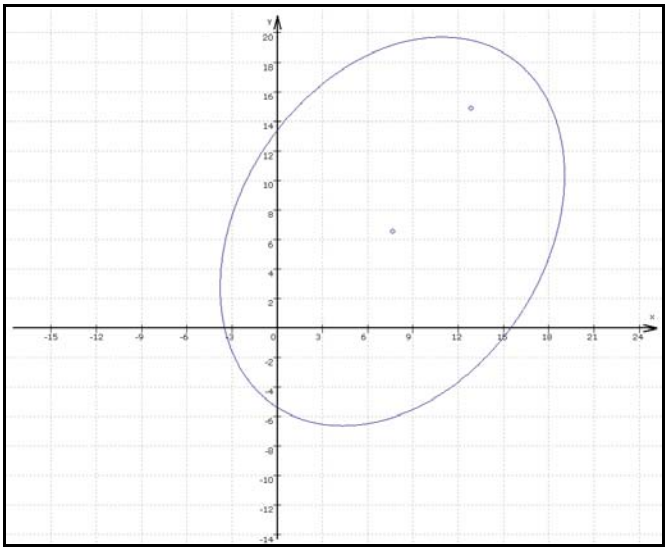


Kurven 2. Ordnung in der affinen Ebene

Durch Transformationen wird Vieles leichter







Aufgabe:

Bei den vorherigen Graphen von Kurven wurde der Term des Ausgangsbeispiels gezielt verändert.

Die zugehörigen Gleichungen sind nachfolgend aufgeführt.

Ordnen Sie begründet die Terme den Graphen zu!

	$4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y + 216 = 0$
a)	$4\cdot x^2 + 0\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y - 216 = 0$
b)	$4\cdot x^2 + 0\cdot x\cdot y + 4\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y - 216 = 0$
c)	$4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y - 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y + 216 = 0$
d)	$4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y - 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y - 216 = 0$
e)	$4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y - 216 = 0$
f)	$0\cdot x^2 - 0\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y + 216 = 0$
g)	$4\cdot x^2 - 0\cdot x\cdot y + 0\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y + 216 = 0$
h)	$4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y - 4\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y - 216 = 0$
i)	$4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y - 3\cdot y^2 + 0\cdot x + 0\cdot y - 216 = 0$

Kurven 2. Ordnung in der affinen Ebene

Durch Transformationen wird Vieles leichter

Was uns bekannt ist: Ellipsen in Mittelpunktslage, wobei zusätzlich die Hauptachsen auf den Koordinatenachsen liegen, werden beschrieben durch Gleichungen der Form:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Für a = b ergibt sich ein Kreis, ersetzt man das "+" durch ein "-", so wird eine Hyperbel beschrieben, und die Scheitelpunktsgleichung einer Parabel lautet: $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$.

Im folgenden wollen wir exemplarisch versuchen, die Gleichung des Ausgangsbeispiels in eine Gleichung der obigen Form zu transformieren.

$$\boxed{4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2 - 48\cdot x - 24\cdot y + 216 = 0}$$

Da die linearen Terme nach unseren früheren Untersuchungen offensichtlich verantwortlich für eine Mittelpunktsverschiebung sind, soll eine Koordinatentransformation durchgeführt werden, die diese Terme eliminiert.

<u>1. Transformation (Verschiebung):</u>

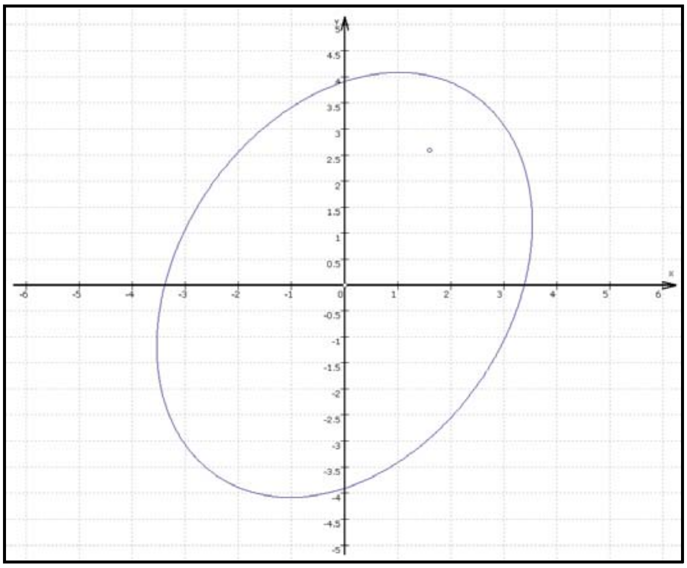
$$x' = x - u \wedge y' = y - v \Leftrightarrow x = x' + u \wedge y = y' + v$$

$$4\cdot(x'+u)^2 - 2\cdot(x'+u)\cdot(y'+v) + 3\cdot(y'+v)^2 - 48\cdot(x'+u) - 24\cdot(y'+v) + 216 = 0$$

....

<u>Aufgabe:</u> Zeigen Sie, dass sich als Ergebnis der 1. Transformation folgende Gleichung ergibt:

$$\boxed{4\cdot x'^2 - 2\cdot x'\cdot y' + 3\cdot y'^2 - \frac{504}{11} = 0}$$



Vergleichen Sie diesen Graphen mit dem Graphen auf der ersten Seite. - Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen? - Wie groß sind die Halbachsen ungefähr?

....

Kurven 2. Ordnung in der affinen Ebene

Durch Transformationen wird Vieles leichter

2. Transformation (Drehung):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{//} & = & x^{/}\cdot\cos(\varphi) + y^{/}\cdot\sin(\varphi) \\ \wedge\ y^{//} & = & -x^{/}\cdot\sin(\varphi) + y^{/}\cdot\cos(\varphi) \end{array} \right\}$$

Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem äquivalent ist zu:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{/} & = & x^{//}\cdot\cos(\varphi) - y^{//}\cdot\sin(\varphi) \\ \wedge\ y^{/} & = & x^{//}\cdot\sin(\varphi) + y^{//}\cdot\cos(\varphi) \end{array} \right\}$$

Unter Verzicht auf die Kennzeichnung neuer Koordinaten durch die Hochstriche: “ // ” ergibt sich:

$$\boxed{4\cdot(x\cdot\cos(\varphi)-y\cdot\sin(\varphi))^2-2\cdot(x\cdot\cos(\varphi)-y\cdot\sin(\varphi))\cdot(x\cdot\sin(\varphi)+y\cdot\cos(\varphi))+3\cdot(x\cdot\sin(\varphi)+y\cdot\cos(\varphi))^2-\frac{504}{11}=0}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass sich als Ergebnis der 2. Transformation ergibt: $\boxed{\tan(2\cdot\varphi) = -2}$ oder $\boxed{\tan(\varphi) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}}$, woraus folgt: $\varphi_1 \approx 58{,}283°$ und $\varphi_2 \approx -31{,}717°$.

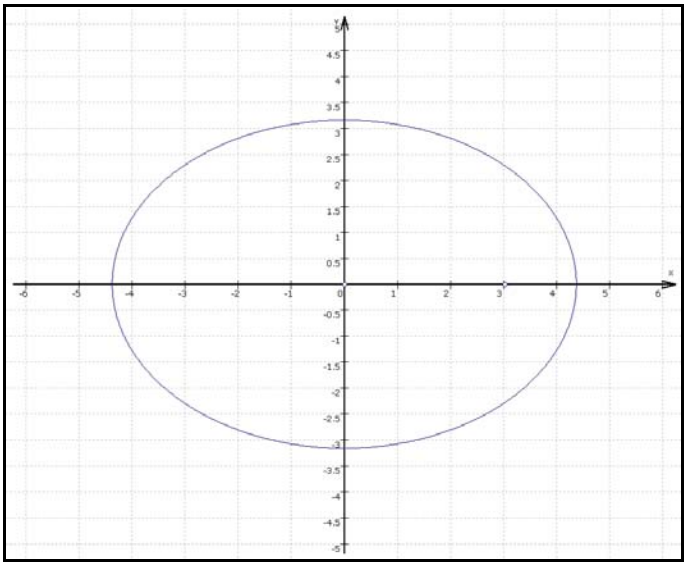
Eine Ellipsengleichung lautet nun:

$$\boxed{2{,}4\cdot x^2 + 4{,}6\cdot y^2 - \frac{504}{11} = 0}$$

und durch Umformung ergibt sich:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{210}{11}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2520}{253}}\right)^2} = 1$$

Die Maße der Halbachsen der Ellipse sind damit ungefähr: $a \approx 4{,}37$; $b \approx 3{,}16$.



Aufgaben: Führen Sie Transformationen der Gleichungen der anderen dargestellten Kurven durch, dass Mittelpunktsgleichungen (von Ellipsen, Hyperbeln, Kreisen) bzw. Scheitelpunktsgleichungen (Parabeln) entstehen.

Untersuchen Sie Sonderfälle für die Koeffizienten A, B, C, D, E, F $\in \mathbb{R}$ in der allgemeinen Form einer Kurve 2. Ordnung, so dass keine der oben benannten Kurven entsteht.