Länge eines Kurvenstücks

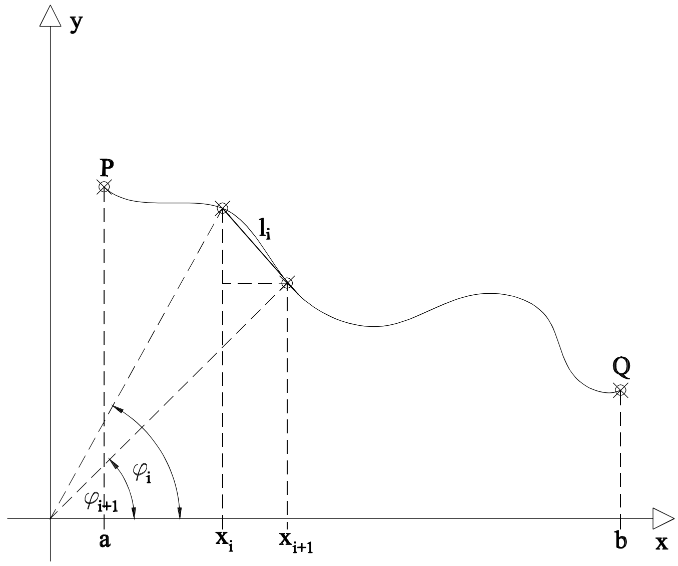
oder, ... ein weiteres Mal lineare Approximation

Gesucht ist die Länge eines Graphenstücks zwischen den Punkten P und Q.

Wir wollen zunächst annehmen, dass das Kurvenstück der Ausschnitt eines Funktionsgraphen einer Funktion **f** über einem Intervall [a ; b] ist, womit wir uns, in bewährter Form, eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen dieses Intervalls vorstellen können (x_0 := a; x_n := b).

Das Kurvenstück über dem kleinen Teilintervall: [x_i ; x_{i+1}] denken wir uns linear durch eine Sehne l_i approximiert.

Offensichtlich gilt:



$$\boxed{\mathbf{l_i} := \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}}$$

---

1) Begründe die folgenden Beziehungen bzw Umformungsschritte.

$$\mathbf{l_a^b} := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1 + \frac{\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2}}\cdot\left(x_{i+1} - x_i\right)\right)$$

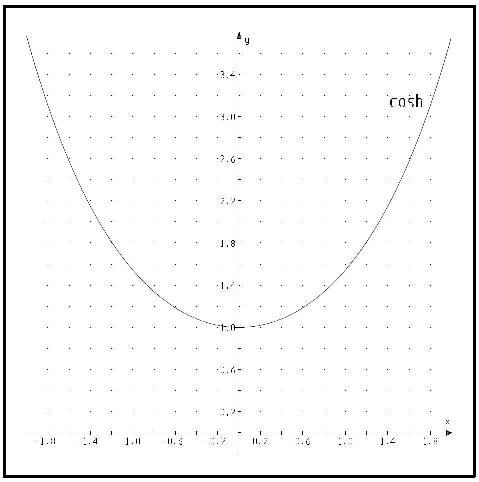
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2}\cdot\left(x_{i+1} - x_i\right)\right)$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\cdot dx$$

---

2) Nebenstehend skizziert ist die Funktion **cosh** über dem Intervall [-2 ; 2] und bekanntlich gilt: $\mathbf{cosh}(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Berechne die Länge des Funktionsgraphen über dem angegebenen Intervall.



Länge eines Kurvenstücks

oder, ... ein weiteres Mal lineare Approximation

3) a) Bestätige durch schrittweise Herleitung als Grenzwert einer geeigneten Riemannsummation, dass durch das bestimmte Integral:

$$\int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot dx$$

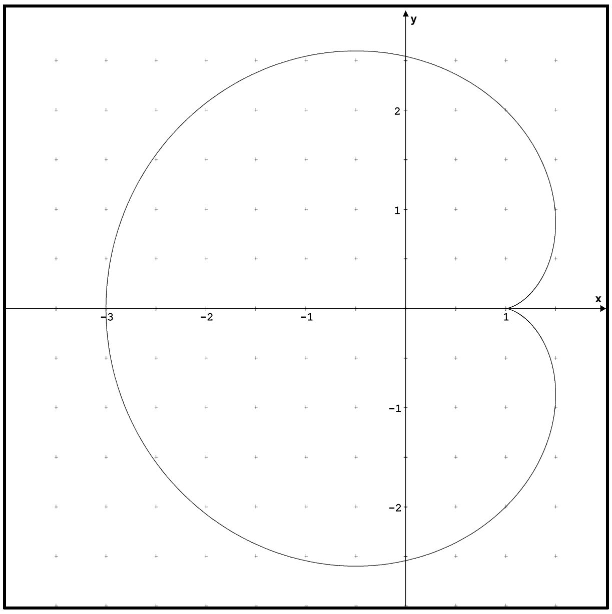
die Größe der Mantelfläche beschrieben wird, die bei Rotation eines Kurvenstücks um die x-Achse entsteht.

b) Berechne die Größe der Mantelfläche, die bei Rotation des Graphen von **cosh** um die x-Achse über dem Intervall [-2 ; 2] entsteht.

Nebenstehend ist der Graph einer Kardioide skizziert, die u.a. durch folgende Parametergleichungen definiert werden kann:[1]

$$\begin{aligned} & x(\varphi) = \cos(2\cdot\varphi) - 2\cdot\cos(\varphi) \\ \wedge\ & y(\varphi) = \sin(2\cdot\varphi) - 2\cdot\sin(\varphi) \end{aligned}$$

mit $\varphi \in [\ 0\ ;\ 2\cdot\pi\ ]$



4) a) Bestätige bei mindestens drei Graphenpunkten durch exemplarische TR-Rechnung die Zugehörigkeit des Graphen zum obigen Gleichungssystem.

b) Beweise unter Verwendung der Anfangsskizze, dass eine Kurvenlänge **l**, wenn die Kurve durch Parametergleichungen beschrieben wird, durch folgende Gleichung definiert werden kann:

$$\mathbf{l} := \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2}\cdot d\varphi$$

c) Bestätige durch Integration, dass die Maßzahl der Länge der obigen Kardioide 16 beträgt.

d) (Hausaufgabe) Erstelle eine Skizze (eventuell durch Einsatz eines geeigneten Funktionsplotters) des Graphen, der durch nebenstehende Parametergleichungen beschrieben wird (**Astroide**). - Berechne die Länge der Kurve mit $\varphi \in [\ 0\ ;\ 2\cdot\pi\ ]$. Wenn es dir durch geschlossene Integration nicht möglich ist, wird ein Näherungswert über das Simpson-Verfahren erwartet ($\varphi \in \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ \right]$ genügt dann; Einteilung dieses Intervalls in 6 Teilintervalle!)

$$\begin{aligned} & x(\varphi) = 3\cdot\cos(\varphi) + \cos(3\cdot\varphi) \\ \wedge\ & y(\varphi) = 3\cdot\sin(\varphi) - \sin(3\cdot\varphi) \end{aligned}$$

---

[1] Erinnere dich, oder sieh eventuell in deinen alten Unterlagen aus dem Profilkurs der 11. Klasse nach, wie wir die Kardioide in der Einheit: 'Inversion am Kreis' erzeugt haben (möglicherweise um 2 Einheiten nach links verschoben). Die damals entwickelte Gleichung war in Polarkoordinaten gegeben. - Die Kardioide ist z.B. inverses Bild einer Parabel in Scheitelpunktsform, eine Pascalsche Schnecke oder eine Rollkurve (Zykloide).

Lösung von Aufgabe 4d):

$$\frac{1}{4}\cdot\mathbf{l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-3\cdot\sin(\varphi) - 3\cdot\sin(3\cdot\varphi)\right)^2 + \left(3\cdot\cos(\varphi) - 3\cdot\cos(3\cdot\varphi)\right)^2}\cdot d\varphi$$

$$= 3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\sin(\varphi) + \sin(3\cdot\varphi)\right)^2 + \left(\cos(\varphi) - \cos(3\cdot\varphi)\right)^2}\cdot d\varphi$$

$$= 3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(3\cdot\varphi) - 2\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(3\cdot\varphi)}\cdot d\varphi$$

$$= 3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cdot\cos(4\cdot\varphi)}\cdot d\varphi$$

$$= 3\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos(4\cdot\varphi)}\cdot d\varphi$$

$$= 3\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\cos^2(2\cdot\varphi) - \sin^2(2\cdot\varphi)\right)}\cdot d\varphi$$

$$= 3\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cdot\sin^2(2\cdot\varphi)}\cdot d\varphi$$

$$= 6\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cdot\varphi)\cdot d\varphi = 6$$

Die Maßzahl der Bogenlänge der **Astroide** beträgt 24.

(Das Bestimmte Integral ist offensichtlich wiederum geschlossen, ohne numerische Approximation, lösbar.)