Zur Linearität des Erwartungswertes
Geht es nicht etwas feiner?

Betrachtet man zwei verschiedene Zufallsfunktionen, bezogen auf dieselbe Definitions- (Ergebnis-) menge **Ω** [bzw auf die fortgesetzte Definitions- (Ereignis-) menge $\wp(\Omega)$], so gilt bekanntlich nach Definition für den Erwartungswert und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\mu_X = E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \; ; \quad p_i := P(X = x_i) = P(X(\omega_i) = x_i)$$
$$\mu_Y = E(Y) := \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot q_j \; ; \quad q_j := P(Y = y_j) = P(Y(\omega_j) = y_j)$$

Was ist nun der Erwartungswert der Summenfunktion **X + Y** ? - Warum kann man nicht so einfach sagen, dass gilt:

$$E(X+Y) := \mu_X + \mu_Y \; ?$$

Ich hoffe, jedem fällt auf, dass man die obigen beiden Summen nicht so einfach zusammenfassen kann (mit Anwendung des Distributivgesetzes und ...), weil die Wahrscheinlichkeitsverteilungen i.a. nicht „kompatibel“ sind. - Was tun?

Bekanntlich gilt: Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich (aber bitte: vernünftig - widerspruchsfrei!).

Wir verfeinern die Wahrscheinlichkeitsverteilungen so, dass sie „kompatibel“ sind und zwar in folgender Weise:

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \quad ; \quad q_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ji}$$

d.h. p_{ij} gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsfunktion X den Funktionswert x_i **<u>und</u>** die Zufallsfunktion Y den Funktionswert y_j [bzw q_{ji} gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsfunktion Y den Funktionswert y_j **<u>und</u>** die Zufallsfunktion X den Funktionswert x_i] annimmt. - Damit gilt selbstverständlich: $p_{ij} = q_{ji}$ und die (kompatiblen) Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestehen aus n·m Einzelwahrscheinlichkeiten.

Nun kann summiert werden:

$$\begin{aligned}
\mu_X + \mu_Y &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot q_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} y_j \cdot q_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \cdot p_{ij} =: E(X+Y)
\end{aligned}$$

Ob man in der letzten Zeile die Summationen vertauscht, oder statt p_{ij} nun q_{ji} schreibt ist eigentlich egal! - Warum eigentlich? - Was ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X+Y ?

Zur Linearität des Erwartungswertes
Geht es nicht etwas feiner?

Wir machen uns den Sachverhalt noch einmal an einem Beispiel klar!

Es sei **Ω** := { 1, 2, ... 20} ; das Zufallsexperiment könnte das Ziehen einer Kugel aus einer Urne sein, die mit den Zahlen von 1 bis 20 gekennzeichnet sind.

Die Zufallsfunktion **X** nimmt den Funktionswert x_1 = **7** an, wenn die Nummer auf der Kugel ein Vielfaches von **7** ist, sie nimmt den Funktionswert x_2 = **3** an, wenn die Nummer auf der Kugel ein Vielfaches von **3** ist, in allen anderen Fällen ist der Funktionswert x_3 = **1**.

Die Zufallsfunktion **Y** nimmt den Funktionswert y_1 = **6** an, wenn die Nummer auf der Kugel ein Vielfaches von **6** ist, sie nimmt den Funktionswert y_2 = **5** an, wenn die Nummer auf der Kugel ein Vielfaches von **5** ist, sie nimmt den Funktionswert y_3 = **13** an, wenn die Nummer auf der Kugel ein Vielfaches von **13** ist, in allen anderen Fällen ist der Funktionswert y_4 = **1**.

<u>Aufgaben:</u>

a) Bestätige, dass gilt: E(X) = 2,20 und E(Y) = 3,15 .

b) Es ist: $p_3 = \frac{12}{20}$ und $q_1 = \frac{3}{20}$. Gib p_{31} (bzw q_{13}) an und beschreibe, welches Ereignis durch dieses Wahrscheinlichkeitsmaß gekennzeichnet wird.

c) Schreibe alle 12 Summanden von E(X+Y) auf und bestätige das Ergebnis der Summation (5,35).

<u>Nun kommt eine „tolle“ Folgerung:</u>

Hat man es mit einer <u>binomialverteilten</u> Zufallsfunktion zu tun, d.h. mit einer Zufallsfunktion, die einer Bernoullikette der Länge n jeweils die Anzahl der Treffer zuordnet, so kann man diese Zufallsfunktion auffassen als Summe von n Indikatorfunktionen I_k , d.h $X = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$.

Eine Indikatorfunktion I_k „schaut“ bei einem n-Tupel nur (wie ein Fenster) auf die k-te Stelle und stellt fest: Treffer oder Niete - 0 oder 1. Die anderen Stellen werden von I_k einfach ausgeblendet, oder anders ausgedrückt: I_k reduziert die Bernoullikette auf das k-te Bernoulliexperiment.

Trivialerweise gilt: $E(I_k) = p$ (für jede der n Indikatorfunktionen)

und damit: $E(X) = n \cdot p$
