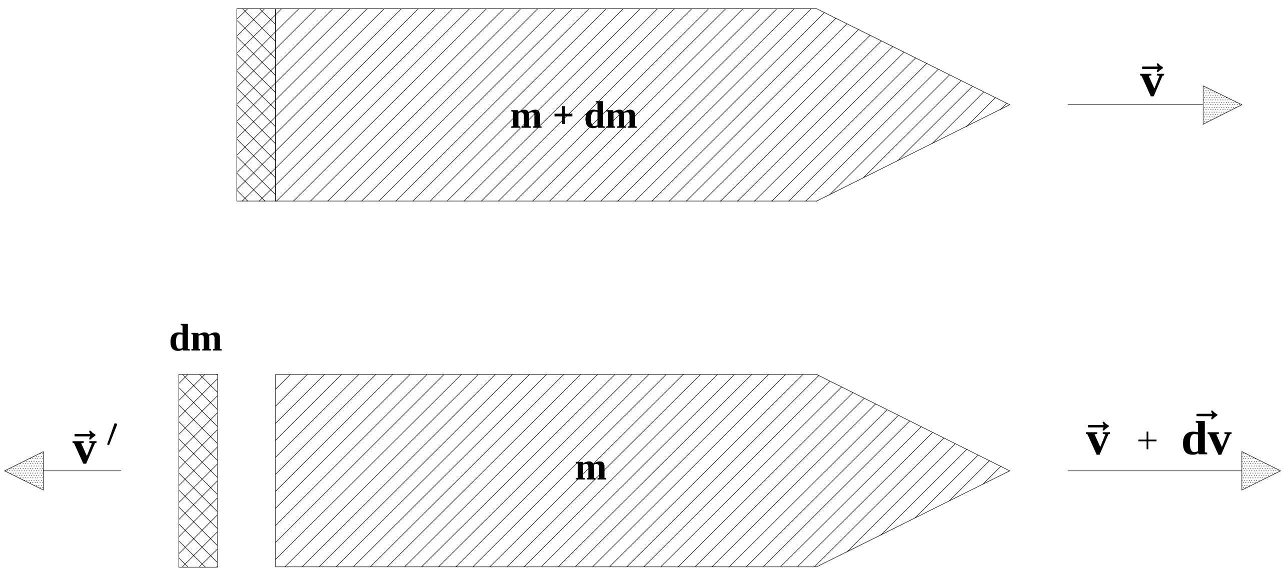
Die Geschwindigkeit einer Rakete



Eine Rakete besitze zu einem Zeitpunkt **t** die Masse **m + dm** und den Betrag **v** der Geschwindigkeit, zum Zeitpunkt **t + dt**, also um die Zeit **dt** später hat die Rakete die Masse **dm** (Gase) mit der Austrittsgeschwindigkeit **u** abgestoßen, die Restmasse **m** erfährt dadurch einen betragsmäßigen Geschwindigkeitszuwachs **dv**.

Im Inertialsystem gilt nach Impulssatz: $\mathbf{(m - dm) \cdot v = m \cdot (v + dv) + dm \cdot v'}$,

wobei zu beachten ist, dass wegen m'(t) < 0 und dt > 0 gilt: dm < 0 bzw - dm > 0 ; - und v' := u - v !

---

1. Lösung: Aus obiger Gleichung ergibt sich: $\mathbf{\frac{-dm}{m} \cdot u = dv}$, wobei zu beachten ist, dass m eine zeitabhängige Größe ist!

$$u \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{-dm}{m(t)} \cdot \frac{dt}{dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \quad -u \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{m'(t)}{m(t)} \cdot dt = v(t) - v(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad -u \cdot \left[\ln\left(m(t)\right) - \ln\left(m(t_0)\right) \right] = v(t) - v(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) = v(t_0) - u \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{m(t_0)} \right) \; ; \qquad [\, -g \cdot t \,]$$

- g·t muß bei Wirken des Gravitationsfeldes der Erde in der Nähe der Erdoberfläche noch addiert werden.

Die Geschwindigkeit einer Rakete

2. Lösung: Führt man die von der Bauart des Raketenmotors abhängige Größe des Schubs **S** ein, der definiert ist als: $\mathbf{S} := -u \cdot \frac{dm}{dt}$, so ergibt sich leicht, in Abhängigkeit von dieser Größe als Gleichung für die zeitabhängige Masse: $m(t) = -\frac{S}{u} \cdot t + m(t_0)$.

Die Ausgangsgleichung ergibt nun: $$\frac{dv}{dt} = \frac{S}{m(t)} = \frac{S}{m(t_0) - \frac{S}{u} \cdot t} = \frac{-\frac{S}{u}}{m(t_0) - \frac{S}{u} \cdot t} \cdot (-u)$$

Durch Integration erhält man:
$$v(t) = -u \cdot \ln\left(m(t_0) - \frac{S}{u} \cdot t \right) + u \cdot \ln\left(m(t_0)\right) + v(t_0)$$
$$= v(t_0) - u \cdot \ln\left(1 - \frac{S}{u \cdot m(t_0)} \cdot t \right)$$

Bei der 2. Art der Lösung ist natürlich der Zeitpunkt $\mathbf{t_\infty}$ interessant, wobei: $\mathbf{t_\infty} := \frac{u \cdot m(t_0)}{S}$ ist! - Wie groß sind Masse und erreichte Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt?

Möchte man eine minimale Nutzlast $\mathbf{m_{min}}$ befördern, so ist die maximal erreichbare Geschwindigkeit $\mathbf{v_{max}}$:
$$\mathbf{v_{max}} = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{\mathbf{m_{min}}} \right).$$

Für die Saturn V - Rakete galt: $u = 5000 \frac{m}{s}$

und für die Apollo-Raumfähre (m_{min}): $m_{min} = 1\% \cdot m_0$.

Berechne die maximal erreichbare Geschwindigkeit der Apollo-Raumfähre (ohne Berücksichtigung des Gravitationsfeldes), wenn wir von einer Anfangsgeschwindigkeit (Start): $v_0 = 0 \frac{m}{s}$ ausgehen.

Zur Fluchtgeschwindigkeit (aus dem Erdfeld): $E_{KIN} = \frac{m}{2} \cdot v^2$; $E_{POT} = (-)\ \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r}$

Fluchtbedingung: $\frac{m}{2} \cdot v^2 - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R} = 0$; $\Rightarrow$ $v = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R}} = \sqrt{2 \cdot R \cdot g}$.

(Bei der letzten Umformung wurde verwendet, dass auf der Erdoberfläche gilt: $m \cdot g = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$!)

Berechne die Fluchtgeschwindigkeit und vergleiche mit v_{max} der Apollo-Raumfähre!