Resonanz und Dämpfung

Wenn eine Masse m an einem Federpendel (Federkonstante D) frei ohne Dämpfung schwingt, genügt die Elongation s = s (t) der Differentialgleichung

$$m \cdot s''(t) + D \cdot s(t) = 0 .$$

Dies ist eine unmittelbare Folgerung des HOOKEschen Gesetzes.

Geht man davon aus, daß die Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit s´(t) sind, was für nicht zu große Geschwindigkeiten in guter Näherung angenommen werden kann, so muß die Elongation der Differentialgleichung (DGL)

$$m \cdot s''(t) + k \cdot s'(t) + D \cdot s(t) = 0$$

genügen.

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist z.B.

$$s(t) = A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ mit } \lambda = \frac{k}{2 \cdot m} \text{ und } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}} \qquad (*)$$

(Dies läßt sich in jedem LK verifizieren und auch GK-Schüler lernen im Laufe des Kurses ma-2 grundsätzlich die Grundlagen, um bestätigen zu können, daß es sich hier um eine Lösung der obigen DGL handelt.)

Wirkt eine periodische Kraft $F = F_o \cos(\omega \cdot t)$ auf das Pendel ein, so ergibt sich nach der sogenannten Einschwingzeit

$$s(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2 \cdot \omega^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - \alpha) \qquad (**)$$

als eine Lösung der DGL

$$m \cdot s''(t) + k \cdot s'(t) + D \cdot s(t) = F_o \cos(\omega \cdot t) .$$

Aus der Gleichung (**) erkennt man, daß das Pendel und die erregende Kraft nicht in Phase schwingen. Außerdem sieht man, daß die Amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2 \cdot \omega^2}}$$

der Schwingung von der Erregerfrequenz ω und der Dämpfung k abhängt.

Es soll nun untersucht werden,

(1) für welche Erregerfrequenz ω die Amplitude A (ω) maximal wird.

(2) welchen Einfluß der Parameter k (die Dämpfung) auf den Verlauf von A(ω) hat.

Man beachte, daß vier Frequenzen voneinander unterschieden werden müssen:

1. Die Frequenz $\omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}}$, mit der das ungedämpfte System frei schwingt.

2. Die Frequenz $\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}}$, mit der das gedämpfte System frei schwingt. (Das freie gedämpfte System schwingt also stets mit kleinerer Frequenz (also größerer Schwingungsdauer) als das ungedämpfte System). - Für $\frac{D}{m} \leq \frac{k^2}{4 \cdot m^2}$, also für $k \geq 2 \cdot \sqrt{D \cdot m}$ kann das System keine Schwingungen mehr ausführen.

3. Die Frequenz ω , mit der das gedämpfte System unter Einfluß der Kraft $F_o \cdot \cos(\omega \cdot t)$ eine erzwungene Schwingung vollführt. (Nach der Einschwingzeit schwingt das erregte System grundsätzlich mit der Frequenz des Erregers.)

4. Die Erregerfrequenz ω_{max} , bei der die Amplitude des Systems maximal wird.

(1) Bestimmung von ω_{max}

Wegen: $$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2 \cdot \omega^2}}$$

wird A (ω) sicherlich dann maximal, wenn der Nenner

$$\sqrt{m^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2 \cdot \omega^2}$$

minimal wird. Der Nenner N (ω) nimmt seinen minimalen Wert an, wenn der Radikand

$$R(\omega) = m^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2 \cdot \omega^2$$

minimal wird.

(Wir stoßen an dieser Stelle auf ein anwendungsbezogenes Minimax-Problem, das sich mit "Mitteln der Klasse 11" lösen läßt. Zwar ist in Klasse 11 die Kettenregel noch nicht vorhanden, die in der folgenden Rechnung benutzt wird, doch läßt sich der Term $m^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2 \cdot \omega^2$ problemlos ausmultiplizieren, und ω kann nach dem Ableiten ausgeklammert werden.)

$$R'(\omega) = 2\,m^2 \cdot (-2\,\omega) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\,k^2 \cdot \omega$$

Aus $$0 = 2\,m^2 \cdot (-2\,\omega_{max}) \cdot (\omega_0^2 - \omega_{max}^2) + 2\,k^2 \cdot \omega_{max}$$

folgt für $\omega_{max} \neq 0$:

$$0 = 2\,m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_{max}^2) - k^2$$

$$2\,m^2 \cdot \omega_{max}^2 = 2\,m^2 \cdot \omega_0^2 - k^2$$

Also ist $$\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2 \cdot m^2}}}$$

die einzige physikalisch relevante Lösung.

Offensichtlich gilt für $k \neq 0$: $$\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2 \cdot m^2}} < \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}}$$

Die Resonanzfrequenz ist damit kleiner als die Frequenz, mit der das gedämpfte System frei schwingt.

Im Folgenden sollen an konkreten Beispielen die Resonanzkurven A(ω) für verschiedene Parameter k (also für verschiedene Dämpfungen) betrachtet werden. Außerdem sollen dazu parallel die freien Schwingungen veranschaulicht werden, die zu den entsprechenden Dämpfungsfaktoren gehören.

(2) Resonanz konkret

Es sei ein Federpendel mit $D = 10 \frac{N}{m}$ vorgegeben. (Für "Nichtphysiker": D gibt die Stärke der Feder an. Die hier vorgegebene Feder wird durch die Gewichtskraft der Masse m = 0,1 kg um 0,1 m ausgelenkt. Es wird dabei in Näherung mit der Erdbeschleunigung $g = 10 \frac{m}{s^2}$ gerechnet.)

Die Feder soll nun mit der Masse m = 0,1 kg einerseits unter Einfluß der periodischen Kraft F (F_0 = 0,1 N) und andererseits frei schwingen.

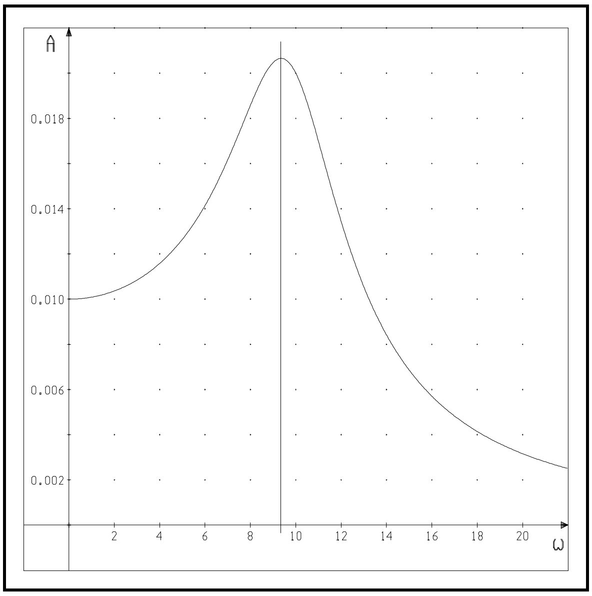
Für $k = 0{,}5 \frac{kg}{s}$ erhält man:[1]

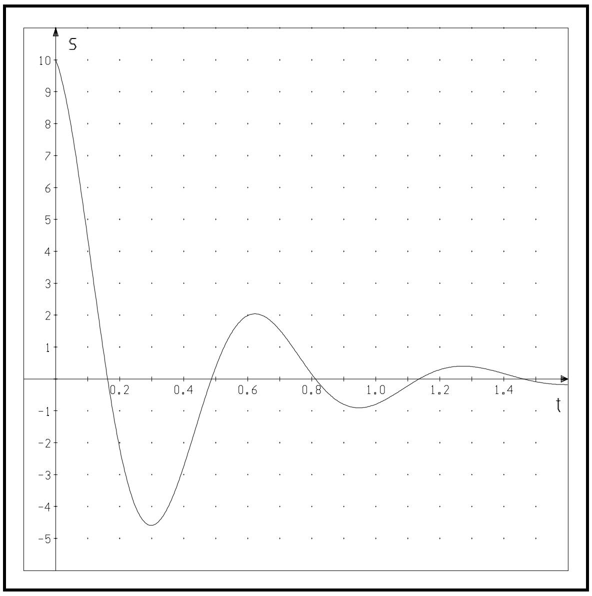
$$s(t) = 10 \cdot e^{-2,5 \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{100 - 6{,}25} \cdot t\right)$$

$$\approx 10 \cdot e^{-2,5 \cdot t} \cdot \cos(9{,}68 \cdot t)$$

(das Federpendel wird zu Beginn der freien Schwingung um 10 cm ausgelenkt)

$$A(\omega) = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}01 \cdot \left(100 - \omega^2\right)^2 + 0{,}25 \cdot \omega^2}}$$





Kontrollen:

Das System schwingt frei mit der Frequenz (Kreisfrequenz) $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$. Also muß für die Schwingungsdauer $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{100 - 6{,}25}} \approx \frac{2 \cdot \pi}{9{,}68246} \approx 0{,}649$ gelten. Dies läßt sich an der Graphik überprüfen. Die Resonanzkurve hat für $\omega_{max} = \sqrt{100 - 12{,}5} \approx 9{,}354$ ihr Maximum.

---

[1] Die Elongation s(t) für die freie Schwingung wird graphisch in Zentimetern angegeben, um "realistische" Werte zu erhalten; die Angaben für alle weiteren physikalischen Größen erfolgt in MKSA-Einheiten.

Die Kreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung beträgt 10 Hz, die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ist etwas kleiner (sie beträgt nur ungefähr 9,69 Hz) und die Frequenz, bei der Resonanz eintritt, ist noch kleiner: ca. 9,35 Hz.

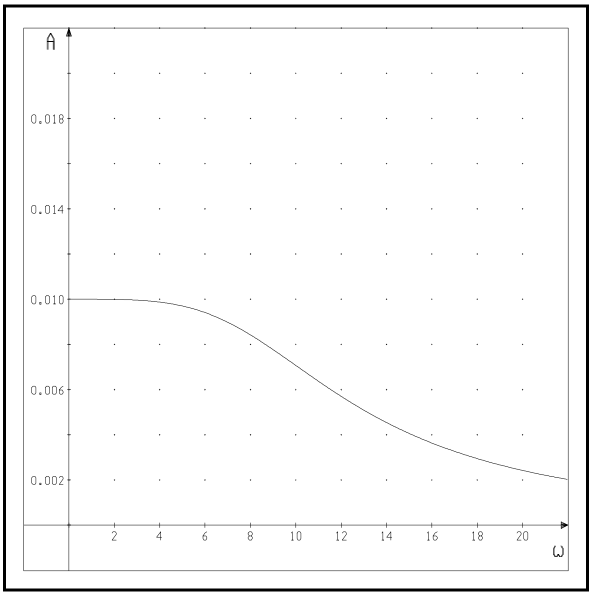
$$\lim_{\omega \to 0} A(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}01 \cdot (100 - \omega^2)^2 + 0{,}25 \cdot \omega^2}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}01 \cdot 100^2}} = 0{,}01$$

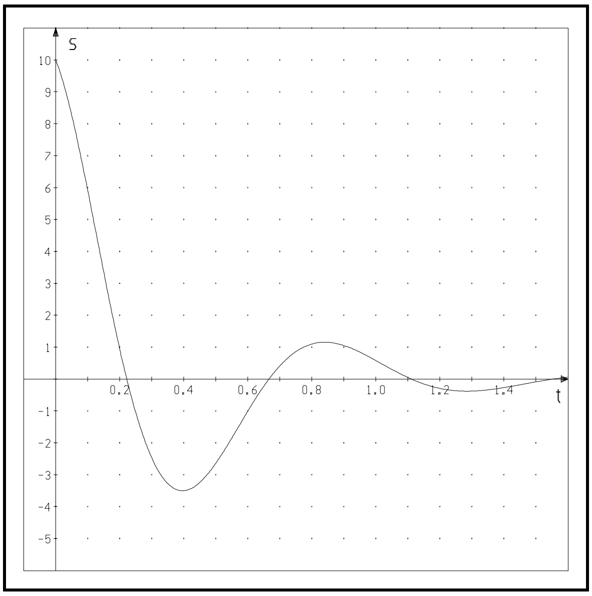
Unabhängig von der Dämpfung führt das System für sehr kleine Frequenzen erzwungene Schwingungen mit der Amplitude A = 1 cm aus.

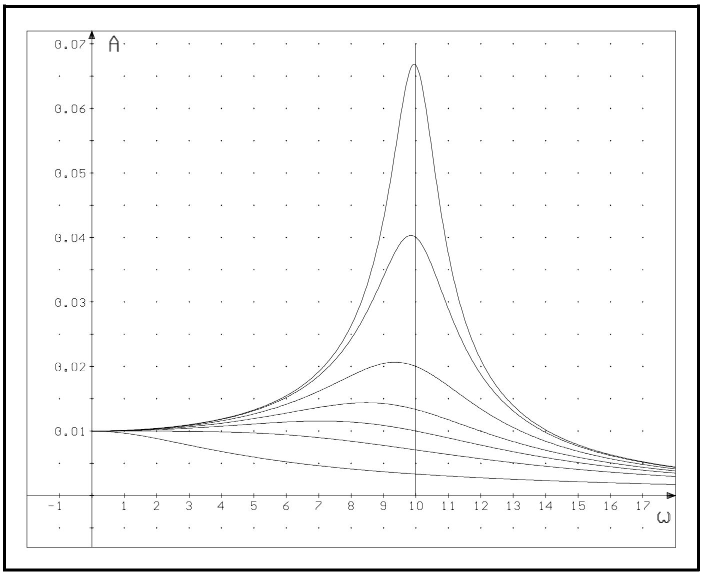
Die Resonanzkurve ist nicht besonders stark ausgeprägt, was die starke Dämpfung bewirkt. Die alleinige Angabe des Dämpfungsfaktors k = 0,5 MKSA-Einheiten ist ohne “anschauliche” Aussagekraft. Da parallel die freie gedämpfte Schwingung dargestellt ist, gewinnt man aber eine Vorstellung, wie sich die Dämpfung auf das Resonanzverhalten des Systems auswirkt.
“Vollständig” läßt sich das Resonanzverhalten betrachten, wenn jetzt die Resonanzkurven für verschiedene ausgewählte Parameter dargestellt werden.

....

Aus $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2 \cdot m^2}}$, also $\omega_{max} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{2 \cdot m^2}}$, folgt, daß die Resonanzkurve für $k \geq \sqrt{2 \cdot D \cdot m}$ kein Maximum aufweist. Dieser Fall ergibt sich bei den anfangs gewählten Werten für $k \geq \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}1} = \sqrt{2}$. - Das freie System schwingt für $k = \sqrt{2}$ mit der Kreisfrequenz $\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}} = \sqrt{100 - \frac{2}{0{,}04}} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$. Die Schwingungsdauer beträgt also für das freie System ca. 0,8886 s .







$$k \in \left\{ \frac{3}{20};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ 1;\ \sqrt{2};\ 3 \right\}$$

Die Graphik zeigt, wie sich die Resonanzkurven für abnehmende Dämpfung immer stärker ausprägen. Die Resonanzfrequenzen verringern sich und sind kleiner als die Kreisfrequenz ω_0.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10 \ ; \quad T_0 \approx 0{,}628\,\mathrm{s}$$

Bemerkungen: Die Differentialgleichung

$$m \cdot s''(t) + k \cdot s'(t) + D \cdot s(t) = 0$$

hat natürlich nicht nur die Lösung: $s(t) = A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \mathbf{sin}(\omega \cdot t)$

$$\left(\text{mit } \lambda = \frac{k}{2 \cdot m} \text{ und } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}} \right),$$

sondern auch die Lösung: $s(t) = A \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \mathbf{cos}(\omega \cdot t)$.

Für schwache Dämpfungen ($k \in \{0{,}2 ; 0{,}1; 0{,}05 ; 0{,}025\}$) erhält man die folgenden, “typischen, bekannten” Resonanzkurven (Die Resonanzfrequenz weicht nur noch unwesentlich von der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ab. Bei den zugehörigen gedämpften Schwingungen sieht man, daß sich die Schwingungsdauern praktisch nicht voneinander unterscheiden):