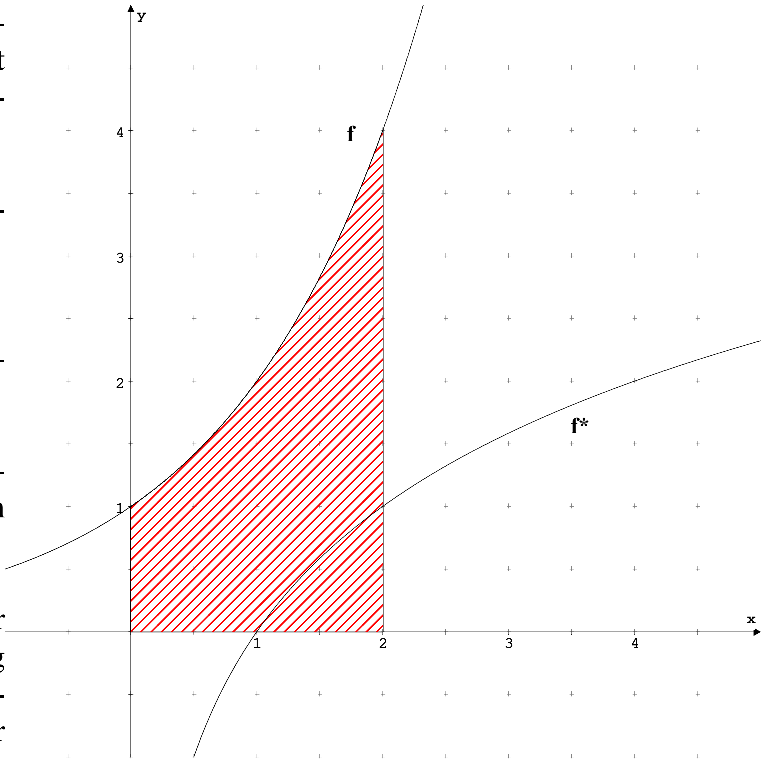
Riemann-Summation

... taugt zu mehr als nur zur Bestimmung von Flächeninhalten !

Nebenstehend skizziert ist die Exponentialfunktion $\mathbf{exp_2}$, d.h. die Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) = 2^x$, mit einem Ausschnitt der zugehörigen Umkehrfunktion $\mathbf{f}^*$.



Das Intervall I := [0 ; 2] sei durch eine Zerlegung:

$$\boldsymbol{Z_n} := \{x_0, \dots, x_n\}$$

einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge in Teilintervalle zerlegt, wobei $x_0 := 0$ und $x_n := 2$ ist.

Nachfolgend sind Ansätze und Umformungsschritte angegeben, die zu einem bestimmten Integral führen.

1) Analysiere die Herleitung, beschreibe unter Zuhilfenahme einer Skizze die Bedeutung der einzelnen algebraischen Teile, und äußere dich zur geometrischen Bedeutung der Bestimmten Integrale. - Benenne zusätzlich benötigte Voraussetzungen.

---

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot \left(f(c_i)\right)^2 \cdot (x_{i+1} - x_i)\right] = \qquad (x_i \le c_i \le x_{i+1}).$$

$$\int_0^2 \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

---

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot x_{i+1}^2 \cdot f(c_i) - \pi \cdot x_i^2 \cdot f(c_i)\right] = \qquad (x_i \le c_i \le x_{i+1}).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot f(c_i) \cdot (x_{i+1}^2 - x_i^2)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot f(c_i) \cdot (x_{i+1} + x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot f(c_i) \cdot 2 \cdot c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)\right] =$$

$$\int_0^2 2 \cdot \pi \cdot x \cdot f(x) \cdot dx$$

---

c) $\quad (x_i \le c_i \le x_{i+1})$.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot c_i^2 \cdot \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot c_i^2 \cdot \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right) \cdot (x_{i+1}-x_i)\right] =$$

$$\int_0^2 \pi \cdot x^2 \cdot f'(x) \cdot dx$$

---

d) $\quad (f(x_i) \le \lambda_i \le f(x_{i+1}))$.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot c_i^2 \cdot \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot \big(f^*(\lambda_i)\big)^2 \cdot \big(y_{i+1} - y_i\big)\right] =$$

$$\int_1^4 \pi \cdot \big(f^*(y)\big)^2 \cdot dy$$

---

2) Bestimme den jeweiligen Wert der Bestimmten Integrale im konkreten Fall der Funktion $\exp_2$ für die 4 Fälle a) - d). Erläutere wiederum Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie Vor- und Nachteile der Integrationsmethoden.

---

3) Erläutere die einzelnen Schritte der folgenden Gleichungskette und benenne benötigte Voraussetzungen:[1]

$$2\cdot\pi \cdot \int_0^2 x \cdot f(x) \cdot dx = 2\cdot\pi \cdot \int_1^4 f^*(y) \cdot y \cdot f^{*\prime}(y) \cdot dy$$

$$= \pi \cdot \int_1^4 y \cdot \left[\big(f^*(y)\big)^2\right]' \cdot dy$$

$$= \pi \cdot \left[\, y \cdot \big(f^*(y)\big)^2 \,\right]_1^4 - \pi \cdot \int_1^4 \big(f^*(y)\big)^2 \cdot dy$$

$$= \pi \cdot 4 \cdot 2^2 - \pi \cdot \int_1^4 \big(f^*(y)\big)^2 \cdot dy$$

<u>Hinweis:</u> Es gilt: $\quad y = f(x)\,;\ x = f^*(y)\,;\ dy = f'(x)\cdot dx\,;\ dx = f^{*\prime}(y)\cdot dy$

---

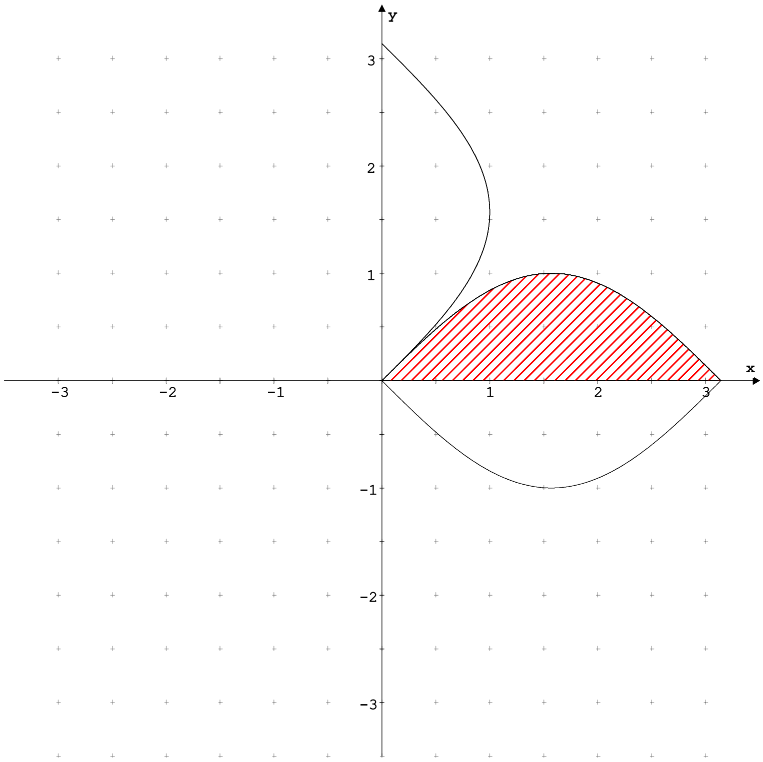
[1] Umformungsschritte von Dr. Matthias Nicol

4) Untersuche anhand des nebenstehend skizzierten Beispiels der Sinusfunktion über dem Intervall [0 ; π] die Auswirkungen der verschiedenen Methoden zur Bestimmung von Rotationsvolumina:

- V_x
- V_y (Zylinder**schalen**methode)
- V_y (Zylinder**scheiben**methode)
- V_y (**Umkehrfunktions**methode)

wenn die Funktion über dem Intervall nicht streng monoton ist.

Untersuche dabei zunächst die Auswirkungen auf die Integration, wenn die Funktion über einem Teilintervall streng monoton fallend ist, wie hier z.B. über dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2} \; ; \; \pi \right]$.



Vergleiche die verschiedenen Methoden zur Bestimmung von V_y in Bezug auf die Ökonomie des Rechenaufwandes. Bei welchen Funktionen, bzw. unter welchen Voraussetzungen, wird man sich für welche Methode entscheiden?