Numerische Integration
von der Keplerschen Faßregel zum Simpson-Verfahren

Gegeben ist die Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) = x \cdot \sin(x)$.

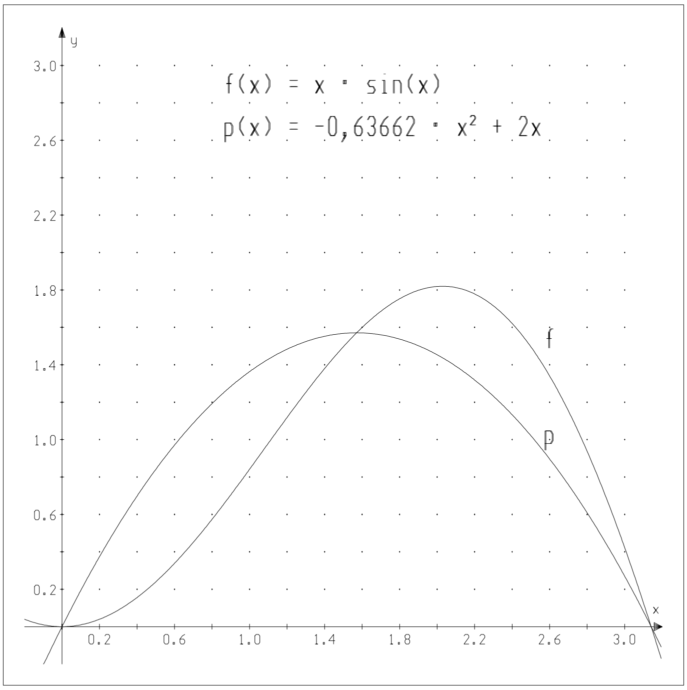
Bestimmt werden soll der Wert des Bestimmten Integrals: $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \cdot dx$.

<u>Aufgaben:</u>

1) Zeigen Sie mit partieller Integration, dass gilt:
$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \cdot dx = \pi \ .$$

2) Bestätigen Sie, dass die numerische Approximation über die Keplersche Faßregel folgenden Näherungswert ergibt:
$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \cdot dx \approx \frac{\pi^2}{3} \approx 3{,}2899 \ .$$

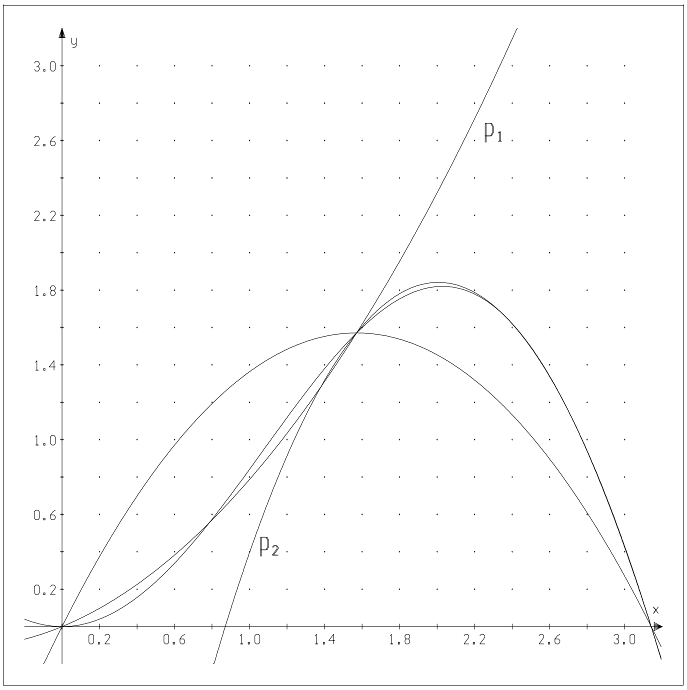
3) Bestimmen Sie den Funktionsterm des quadratischen Kepler-Polynoms und bestätigen Sie durch exemplarische Einsetzungen, dass die nebenstehende Graphik korrekt ist.



4) Bestimmen Sie die Größe des prozentualen Fehlers, den der Näherungswert gegenüber dem exakten Wert besitzt.

Wie aus der Graphik leicht ersichtlich wird, ist die Approximation durch eine Parabel in diesem speziellen Falle schlecht (Begründung?).

Teilt man jedoch das Intervall $[\,0\,;\,\pi\,]$ in die zwei Teilintervalle $\left[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,\right]$ und $\left[\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\,\right]$ und approximiert über beiden Teilintervallen durch jeweils eine Parabel, so ergibt sich graphisch der nebenstehende Sachverhalt.



<u>Bestätigen Sie:</u> Die Keplersche Faßregel, zweimal angewandt über die Approximationsparabeln $\mathbf{p_1}$ und $\mathbf{p_2}$, ergibt ungefähr: 3,14875510!

Die 5 Stützstellen (-punkte) sind ungefähr:

$\mathbf{P_1}(0 \mid 0)$
$\mathbf{P_2}(0{,}78539816 \mid 0{,}55536037)$
$\mathbf{P_3}(1{,}57079633 \mid 1{,}57079633)$
$\mathbf{P_4}(2{,}35619449 \mid 1{,}66608110)$
$\mathbf{P_5}(3{,}14159265 \mid 0)$

$\mathbf{p_1}(x) \approx 0{,}372923 \cdot x^2 + 0{,}414214 \cdot x$

$\mathbf{p_2}(x) \approx -1{,}427709 \cdot x^2 + 5{,}727922 \cdot x - 3{,}903871$

Numerische Integration
von der Keplerschen Faßregel zum Simpson-Verfahren

Nun zur Verallgemeinerung:

Der englische Mathematiker **Thomas Simpson** (1710 - 1761) ist auf die nun sicher naheliegende Idee gekommen, zur Approximation von Bestimmten Integralen die Keplersche Faßregel mehrfach anzuwenden.

1-mal Keplersche Faßregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

2-mal Keplersche Faßregel:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{4} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{4}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{4} \cdot \left[f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{4}\right) + 4 \cdot f\left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{4}\right) + f(b) \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{4} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 2 \cdot f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{4}\right) + 4 \cdot f\left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{4}\right) + f(b) \right]\end{aligned}$$

3-mal Keplersche Faßregel:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a + \frac{b-a}{6}\right) + f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{6}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{6} \cdot \left[f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{6}\right) + 4 \cdot f\left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{6}\right) + f\left(a + 4 \cdot \frac{b-a}{6}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{6} \cdot \left[f\left(a + 4 \cdot \frac{b-a}{6}\right) + 4 \cdot f\left(a + 5 \cdot \frac{b-a}{6}\right) + f(b) \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a + \frac{b-a}{6}\right) + 2 \cdot f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{6}\right) \right. \\ &\qquad + 4 \cdot f\left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{6}\right) + 2 \cdot f\left(a + 4 \cdot \frac{b-a}{6}\right) \\ &\qquad \left. + 4 \cdot f\left(a + 5 \cdot \frac{b-a}{6}\right) + f(b) \right]\end{aligned}$$

Aufgaben:

1) Geben Sie eine allgemeine Näherungsformel für $\int_a^b f(x) \cdot dx$ durch 4-malige Anwendung der Keplerschen Faßregel an.

2) Bestimmen Sie nun im konkreten Fall einen Näherungswert für: $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \cdot dx$ durch 4-malige Anwendung der Keplerschen Faßregel.

   Vergleichen Sie die Güte des Näherungswertes mit den zuvor bestimmten Werten.

Numerische Integration
von der Keplerschen Faßregel zum Simpson-Verfahren

Die Simpson - Formel:

n-mal Keplersche Faßregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2\cdot n} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) \right]$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2\cdot n} \cdot \left[f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + 4 \cdot f\left(a+3\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + f\left(a+4\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) \right]$$

....

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2\cdot n} \cdot \left[f\left(a+(2\cdot n-2)\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + 4 \cdot f\left(a+(2\cdot n-1)\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + f(b) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2\cdot n} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + 2 \cdot f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) \right.$$

$$+ 4 \cdot f\left(a+3\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + 2 \cdot f\left(a+4\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right)$$

....

$$\left. + 4 \cdot f\left(a+(2\cdot n-1)\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right) + f(b) \right]$$

Begründen Sie folgende Aussagen:

a) Für die Anwendung der Simpson-Formel ist es notwendig, das betrachtete Intervall in eine gerade Anzahl von Teilintervallen aufzuteilen.

b) Außer den Randfunktionswerten findet stets ein Wechsel von: “4-facher Funktionswert - 2-facher Funktionswert” statt.