

# Kurvenscharen

## Sieht doch eigentlich ganz einfach aus!?

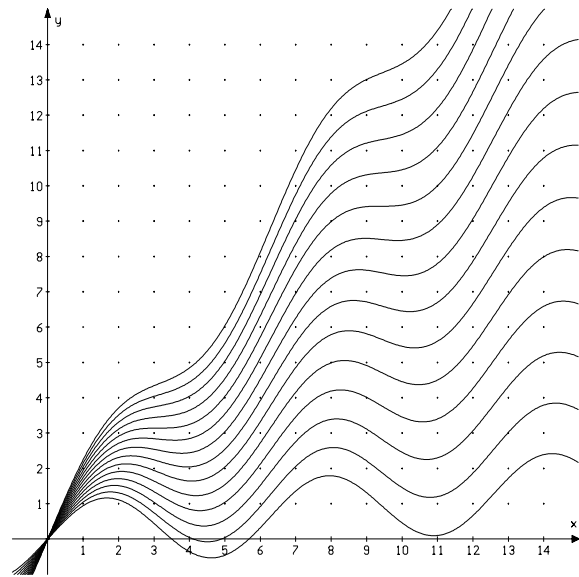
---

Rechts skizziert sind Graphen der Kurvenschar  $f_a$  mit:

$$f_a(x) = a \cdot x + \sin(x)$$

wobei  $a \in \left\{ \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{15}{10} \right\}$ .

Wir betrachten die Ausschnitte über dem Intervall  $I := [0; 10]$  (Definitionsmenge).

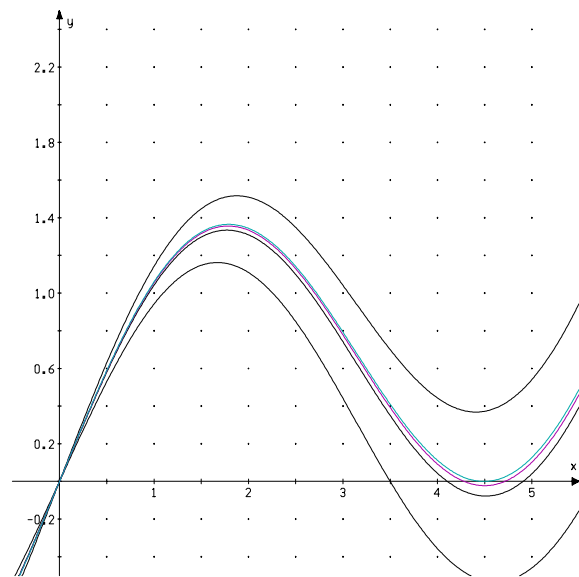


- 1.) Bestimme diejenigen Parameter  $a$ , für die die zugehörige Scharcurve relative Extrema besitzt. - Gib die zugehörigen Punktkoordinaten in Abhängigkeit von  $a$  an, sowie für den Fall  $a = 0,1$  die konkreten Näherungswerte (Erwartete TR-Genauigkeit: 2 Nachkommastellen).
- 2.) Untersuche in Abhängigkeit von  $a$  die Existenz von Wendepunkten. - Welche Kurvenschar besitzt Sattelpunkte? - Gib die zugehörigen Punktkoordinaten an !

### Nun geht es um die Nullstellen:

- 3.) Bestimme mit dem Newton-Verfahren die Nullstellen der Scharcurve zu  $a = 0,1$ . - (Erwartete TR-Genauigkeit: 4 Nachkommastellen).

Nicht ganz so trivial wie bei der Bestimmung relativer Extrema ist hier die Angabe des „Grenzparameters“, für den die zugehörige Scharcurve (außer  $x_0 = 0$  natürlich) überhaupt Nullstellen besitzt.



- 4.) Der Schüler A.M. argumentiert wie folgt:

$$\text{Es gilt: } \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -1 !$$

Deswegen muß die Steigung der Ursprungsgeraden gerade  $\frac{2}{3 \cdot \pi}$  sein, damit die zugehörige Scharcurve einen Berührungspunkt mit der  $x$ -Achse besitzt! - Bestätige oder widerlege die Argumentation! Gib gegebenenfalls den Berührungspunkt an!

Bestätige oder widerlege die Argumentation! Gib gegebenenfalls den Berührungspunkt an!

- 5.) Formuliere geeignete Berührungspunktbedingungen einer Scharcurve mit der  $x$ -Achse! - Bestätige, dass das Problems auf die Lösung der Gleichung:  $0 = -\cos(x) \cdot x + \sin(x)$  führt. Bestimme einen Näherungswert der Lösung im geeigneten Bereich (Anfangswert) mit dem Newton-Verfahren. - Ordne am Schluß den fünf, oben skizzierten Graphen, die zugehörigen Parameter zu.

Nullstellenbestimmung von  $f$  mit  $f(x) = 0,1 \cdot x + \sin(x)$

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	3,00000000	0,44112001	-0,88999250	-0,49564464	3,49564464
2	3,49564464	0,00286316	-0,83797559	-0,00341676	3,49906139
3	3,49906139	0,00000203	-0,83678552	-0,00000243	3,49906382
4	3,49906382	0,00000000	-0,83678467	0,00000000	3,49906382
5	3,49906382	0,00000000	-0,83678467	0,00000000	3,49906382

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	6,00000000	0,32058450	1,06017029	0,30238963	5,69761037
2	5,69761037	0,01708241	0,93339447	0,01830139	5,67930898
3	5,67930898	0,00009341	0,92314068	0,00010118	5,67920780
4	5,67920780	0,00000000	0,92308322	0,00000000	5,67920780
5	5,67920780	0,00000000	0,92308322	0,00000000	5,67920780

Nullstellenbestimmung von  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot x + \sin(x)$

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	4,10000000	0,05176991	-0,36261736	-0,14276733	4,24276733
2	4,24276733	0,00860362	-0,24034234	-0,03579734	4,27856467
3	4,27856467	0,00057476	-0,20813732	-0,00276144	4,28132611
4	4,28132611	0,00000346	-0,20563009	-0,00001683	4,28134294
5	4,28134294	0,00000000	-0,20561480	0,00000000	4,28134294

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	4,90000000	0,05735968	0,39871896	0,14385993	4,75614007
2	4,75614007	0,01024120	0,25594372	0,04001347	4,71612660
3	4,71612660	0,00080013	0,21594420	0,00370528	4,71242133
4	4,71242133	0,00000686	0,21223894	0,00003234	4,71238898
5	4,71238898	0,00000000	0,21220659	0,00000000	4,71238898

Nullstellenbestimmung von  $f$  mit  $f(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	5,00000000	-2,37723520	-4,79462137	0,49581292	4,50418708
2	4,50418708	-0,04738436	-4,40691541	0,01075227	4,49343481
3	4,49343481	-0,00011120	-4,38615471	0,00002535	4,49340946
4	4,49340946	0,00000000	-4,38610522	0,00000000	4,49340946
5	4,49340946	0,00000000	-4,38610522	0,00000000	4,49340946

Nullstellenbestimmung von  $f$  mit  $f(x) = -\cos(4,49340946) \cdot x + \sin(x)$

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	4,55000000	0,00156914	0,05555741	0,02824359	4,52175641
2	4,52175641	0,00039297	0,02775358	0,01415924	4,50759718
3	4,50759718	0,00009833	0,01387031	0,00708959	4,50050759
4	4,50050759	0,00002459	0,00693404	0,00354682	4,49696077
5	4,49696077	0,00000615	0,00346786	0,00177278	4,49518799
6	4,49518799	0,00000153	0,00173640	0,00088392	4,49430406
7	4,49430406	0,00000038	0,00087333	0,00043679	4,49386728
8	4,49386728	0,00000009	0,00044691	0,00020838	4,49365889
9	4,49365889	0,00000002	0,00024348	0,00008705	4,49357184
10	4,49357184	0,00000000	0,00015851	0,00002333	4,49354851

n	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}$
1	4,40000000	0,00422588	-0,09009924	-0,04690252	4,44690252
2	4,44690252	0,00105178	-0,04514509	-0,02329781	4,47020032
3	4,47020032	0,00026243	-0,02259436	-0,01161470	4,48181502
4	4,48181502	0,00006554	-0,01130270	-0,00579897	4,48761399
5	4,48761399	0,00001638	-0,00565339	-0,00289674	4,49051073
6	4,49051073	0,00000409	-0,00282859	-0,00144628	4,49195701
7	4,49195701	0,00000102	-0,00141753	-0,00071979	4,49267681
8	4,49267681	0,00000025	-0,00071510	-0,00035351	4,49303032
9	4,49303032	0,00000006	-0,00037007	-0,00016479	4,49319511
10	4,49319511	0,00000001	-0,00020923	-0,00006334	4,49325845