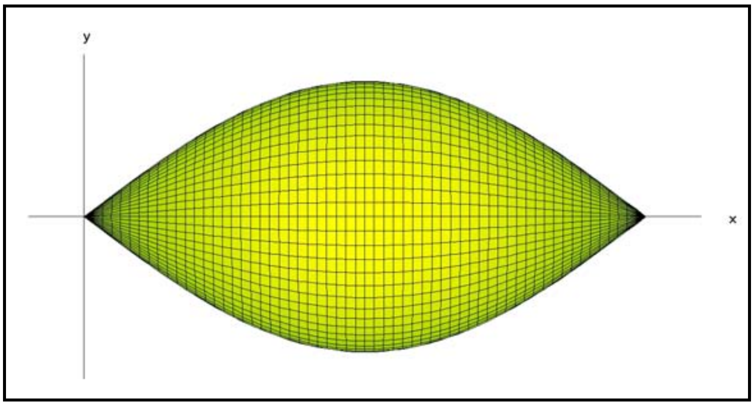
Rotationsvolumen V_x der Sinusfunktion

oder, ... welche Methode ist die Beste?

Läßt man die Fläche unter **sin** über dem Intervall I := [0 ; π] um die x- Achse rotieren, so beschreibt diese Fläche bei Rotation ein Volumen V_x, das nebenstehend skizziert ist.

Wir wollen versuchen, die Größe dieses Rotationsvolumens auf 4 verschiedene Weisen zu bestimmen.



1.) Approximation

Approximiert man die Sinusfunktion über dem Intervall I durch eine nach unten geöffnete Parabel **p**, so erhält man sicher einen guten Näherungswert für V_x, wenn man statt der Fläche unter **sin** die Fläche unter **p** rotieren läßt. Sinnvollerweise nimmt man als gemeinsame Punkte der Graphen die Punkte: $(0\,|\,0)$; $\left(\frac{\pi}{2}\,\middle|\,1\right)$; $(\pi\,|\,0)$.

Aufgabe 1: Bestätige, dass gilt: $\mathbf{p}(x) = \frac{4}{\pi^2}\cdot(\pi\cdot x - x^2)$ und bestimme $\int_0^{\pi} \pi\cdot(\mathbf{p}(x))^2\cdot dx$.

2.) Additionstheoreme

Es gilt:

$$V_x = \int_0^{\pi} \pi\cdot(\mathbf{sin}(x))^2\cdot dx$$

Aufgabe 2: Verwende geeignet das Additionstheorem: $\cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ und den "Pythagoras der Trigonometrie" um den Integranden über cos(2·x) zu vereinfachen. Bestimme danach den exakten Wert von V_x und vergleiche mit dem Näherungswert von Aufgabe 1. Beurteile die Güte der Näherung.

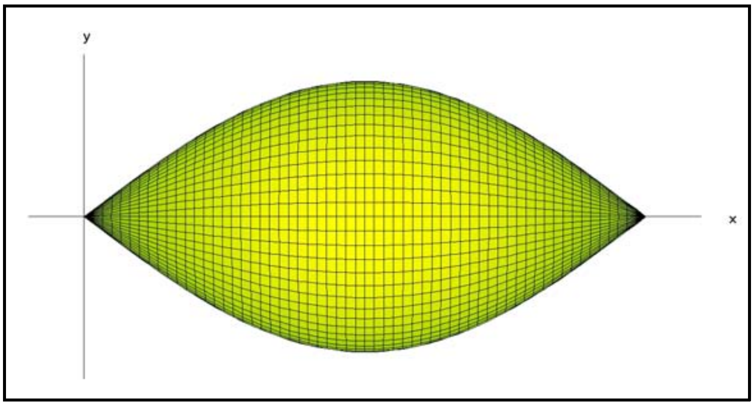
3.) Partielle Integration

Es gilt:

$$V_x = \int_0^{\pi} \pi\cdot\mathbf{sin}(x)\cdot\mathbf{sin}(x)\cdot dx$$

Aufgabe 3: Bestimme über die Methode der Partiellen Integration, und unter Verwendung des "Pythagoras der Trigonometrie", (und einem zusätzlichen kleinen Trick), den exakten Wert von V_x . Vergleiche mit dem Näherungswert von Aufgabe 1 und dem Ergebnis von Aufgabe 2.

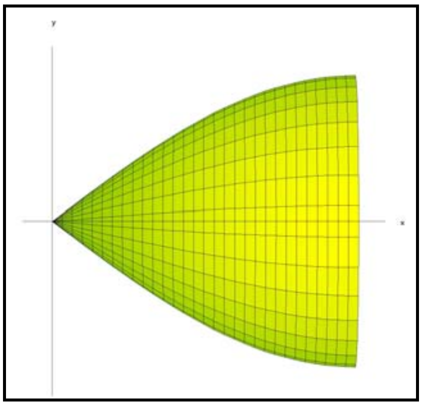
4.) Eine geschickte Transformation

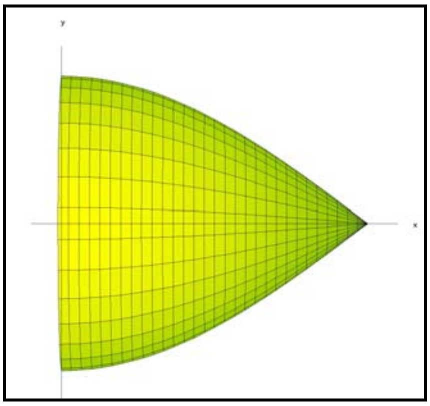


Wir stellen uns das Rotationsvolumen in der Mitte geteilt vor, und danach wird der rechte Teil entlang der x-Achse um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben.

Das Gesamtvolumen hat sich sicherlich durch die Trennung in 2 Teilvolumina nicht verändert.

Aber die Schwierigkeit der Integration!





Aufgabe 4: Bestätige, dass gilt:

$$V_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot (\mathbf{sin}(x))^2 \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot (\mathbf{cos}(x))^2 \cdot dx .$$

Fasse die beiden Integrale nach der Linearität der Bestimmten Integration zu einem Integral zusammen und zeige, dass die Rechnung unter Verwendung des “Pythagoras der Trigonometrie” nun besonders einfach wird.

Bestätige ein weiteres Mal, dass $V_x = \frac{\pi^2}{2}$ ist.