Geometrische Maße

oder, ... wie kann man quantitative Aussagen über geometrische Objekte erhalten?

In der euklidischen Geometrie der Mittelstufe ging es zumeist um geometrische Konstruktionen und um qualitative Aussagen über geometrische Objekte in Bezug zueinander. Möchte man, insbesondere im dreidimensionalen affinen Raum A^3, quantitative Aussagen über geometrische Sachverhalte machen, so muss man sich Maßstäbe oder Meßmethoden definieren, die es z.B. gestatten, Abstände, Winkelgrößen etc zu erhalten, womit man Ergebnisse formulieren kann, die über einfache Lagebeziehungen deutlich hinausgehen.

Da wir in der Analytischen Geometrie dem affinen Raum stets einen Vektorraum zugeordnet haben, in dem wir rechnen können, um dann anschließend das Rechenergebnis wieder geometrisch zu interpretieren,[1] so bietet es sich an, eine neue, sinnvolle Rechenvorschrift im zugehörigen Vektorraum zu definieren, die mit den bisherigen Verknüpfungen verträglich ist und quantitative geometrische Interpretationen ermöglicht.

Wir erinnern uns: In Klassenstufe 8 wurde schon ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, um z.B. bei Geraden und Strecken quantitative Aussagen über Schnittpunktskoordinaten, Steigungsverhalten usw machen zu können. Eine besondere geometrische Situation lag z.B. vor, wenn Geraden parallel oder zueinander senkrecht verliefen. Bekanntlich erkannte man bei einer Geraden und einer zu ihr senkrechten Geraden (Normale) die Senkrechtbeziehung an der Steigung, denn es galt: $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^{\perp} = -1$. - Was bedeutet dies im zugehörigen Vektorraum V^2 ?

Zur Steigung $\mathbf{m} := \frac{a}{b}$ gehört sicherlich die Verschiebung $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ und damit gehört zu

$\mathbf{m}^{\perp} = -\frac{b}{a}$ z.B. die Verschiebung (a, b, k $\in \mathbb{R}^*$) $\begin{pmatrix} -k\cdot a \\ k\cdot b \end{pmatrix}$.

Der Faktor $k \in \mathbb{R}^*$ bedeutet hier, dass selbstverständlich die Länge des charakterisierenden Pfeils keine Rolle spielt, da durch die Verschiebung nur die Richtung einer Normalen beschrieben wird.

Man erkennt leicht: Bildet man die Produkte der Komponenten in x- und y-Richtung [$b\cdot(-k\cdot a)$ und $a\cdot(k\cdot b)$], so unterscheiden sich diese Produkte nur um das Vorzeichen, womit die Summe dieser Komponentenprodukte Null ist.

Wir versuchen es nun mit folgender neuen Operation für Verschiebungen im Vektorraum V^2:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} := u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y$$

Wenn das Ergebnis dieser Operation Null ist, so beschreiben diese Verschiebungen im affinen Raum A^2 offensichtlich zueinander senkrechte Richtungen und wir nennen diese Verschiebungen in Zukunft 'orthogonal'.[2]

Nach dem Permanenzprinzip erweitern wir unsere Definition gleich auf den Vektorraum V^3, das heißt, wir ordnen zwei Verschiebungen des V^3 eine reelle Zahl (durchaus von Null verschieden) zu und überlegen, welche Konsequenzen das hat.

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} := u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y + u_z\cdot v_z$$

---

1 Arbeitsblatt: "Geometrische Objekte im 3-dimensionalen affinen Raum"

2 Beachte: 'Orthogonalität' ist eine Eigenschaft von Elementen eines Vektorraums, während die Senkrechtbeziehung eine Eigenschaft geometrischer Objekte eines affinen Raumes ist.

Weil das Ergebnis der neuen Operation '•' eine reelle Zahl ist (eine skalare Größe) heißt diese Operation Skalarprodukt.

Trivialerweise gilt für das Skalarprodukt das Kommutativgesetz und man erkennt auch leicht, dass gilt:

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} := v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \geq 0$$

Null kann sich dann und nur dann ergeben, wenn $\vec{v}$ der Nullvektor ist, und wegen dieser Eigenschaft nennt man das Skalarprodukt positiv definit.[3]
In der geometrischen Interpretation wird durch $\vec{v} \bullet \vec{v}$ das Quadrat der Länge eines zugehörigen Verschiebungspfeils beschrieben[4]. Damit erscheint es sinnvoll zu definieren: $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$.

Ein kurzer mathematischer Exkurs und Ausblick:

Die Verknüpfungen für Vektoren kann man auch abbildungstheoretisch erklären. In diesem Sinne gilt:

$+ : V \times V \to V$	Die innere Verknüpfung $+$ ordnet zwei Vektoren einen Vektor zu,
$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$	die äußere Verknüpfung $\cdot$ ordnet einer reellen Zahl und einem Vektor einen Vektor zu,
$\bullet : V \times V \to \mathbb{R}$	das Skalarprodukt $\bullet$ ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl zu,
$\times : V \times V \to V$	das Vektorprodukt $\times$ ordnet zwei Vektoren einen Vektor zu.[5]

---

1) Untersuche die Verträglichkeit des Skalarprodukts mit der inneren und äußeren Verknüpfung, d.h. gilt z.B.
$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{v}) + (\vec{u} \bullet \vec{w}) \ ?$$
(Beachte die unterschiedlichen Operationen '+' .)

2) Bestimme zu den angegeben Vektoren jeweils einen orthogonalen Vektor $\vec{n}$ (Normalenvektor) und berechne $|\vec{n}|$.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tipps: (für b) und c)): Durch die Null in einer Komponente des ersten Vektors bestimmt man leicht (zweidimensional) zwei Komponenten eines Normalenvektors. Die dritte Komponente berechnet man nun so, dass auch Orthogonalität zum zweiten Vektor vorliegt. - Bei d) und e) sollte ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem aufgestellt werden.

---

3 Beachte: Der Nullvektor ist zu jedem anderen Vektor orthogonal.

4 Den Abstand zweier Punkte im Raum (Anfangs- und Endpunkt eines Pfeils) kann man sich als Länge einer Diagonale eines Quaders vorstellen, die man mit dem Satz des Pythagoras bestimmen kann.

5 Das Vektorprodukt kommt nur (später) im Unterricht des Leistungskurses vor. Es ist bedeutungsvoll auch in physikalischen Zusammenhängen, dort auch oft unter dem Namen 'Kreuzprodukt' vektorieller Größen. - Beachte, dass für einen Physiker bei vektoriellen Größen stets auch der Angriffspunkt, z.B. bei einer Kraft, von Bedeutung ist, während für einen Mathematiker ein Vektor nur ein Element eines Vektorraumes ist.

Geometrische Maße

oder, ... wie kann man quantitative Aussagen über geometrische Objekte erhalten?

Was haben wir uns nun mit der Definition eines Skalarproduktes von Vektoren, neben den Möglichkeiten, im affinen Raum Längen und Senkrechtbeziehungen zu bestimmen, geometrisch ‘eingehandelt’ ?

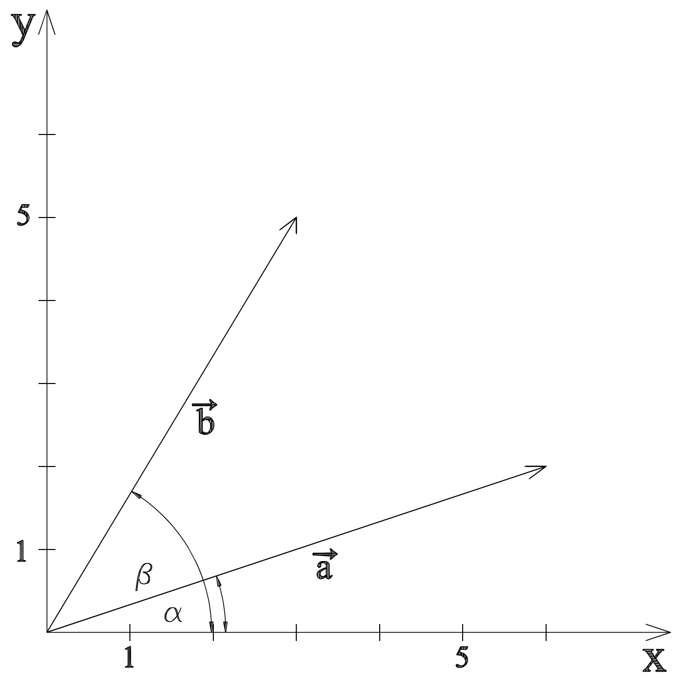
Im praktischen Beispiel ergibt sich bei der Skalarproduktbildung im A^2 :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 28$$

wobei gilt (das können wir schon):

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$|\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$



Wir erinnern uns an trigonometrische Funktionen und bringen die (Polar-)Winkel α und β ‘mit ins Spiel’:

$$a_x = 6 = \sqrt{40} \cdot \cos(\alpha) \;;\quad a_y = 2 = \sqrt{40} \cdot \sin(\alpha) \;;\quad b_x = 3 = \sqrt{34} \cdot \cos(\beta) \;;\quad b_y = 5 = \sqrt{34} \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \qquad 28 = \sqrt{40} \cdot \sqrt{34} \cdot \left[\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \right] = \sqrt{40} \cdot \sqrt{34} \cdot \cos(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{28}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{34}} = \cos(\beta - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \delta := \beta - \alpha \approx 40{,}6^\circ$$

Nach dem Permanenzprinzip verallgemeinern wir den entwickelten Sachverhalt auf den 3-dimensionalen affinen Raum und definieren für einen Winkel δ zwischen zwei durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierten Richtungen:[6]

$$\boxed{\cos(\delta) := \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

---

3) Es seien **A**(2|-4|-1); **B**(-1|8|1); **C**(-3|3|5) drei Punkte des A^3. Bestimme die Seitenlängen, Winkelgrößen und den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC. Gib auch die Koordinaten des Fußpunktes **F** des Lotes von Punkt **C** auf **AB** an. Bestätige das Ergebnis für den Flächeninhalt durch mindestens eine alternative Rechnung.

Hinweise: Man kann den zugehörigen Parameter für den Fußpunkt F in einer vektoriellen Gleichung für g(A,B) aus der Bedingung bestimmen, dass CF und AB senkrecht zueinander sind. - Als alternative Rechnung bieten sich z. B. die Verwendung der Heronschen Dreiecksformel, die Nutzung der Winkelgrößen etc an.

---

6 Beachte, dass damit auch windschiefe Geraden einen Winkel ‘einschließen’, obwohl sie sich nicht schneiden. - Selbstverständlich ist hier der Nullvektor nicht zugelassen; er definiert ja auch keine Richtung.

4) Gegeben sind die vektoriellen Geradengleichungen:

$$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; ; \; r \in \mathbb{R}$$

a) Wie groß ist der jeweilige Abstand dieser Geraden zum Ursprung?

b) Bestimme die Größe des Winkels zwischen den Richtungen, die Fußpunkte $\mathbf{F_g}$ und $\mathbf{F_h}$ des (gemeinsamen) Lotes zwischen diesen Geraden, sowie deren Abstand.

Man kann sich nun fragen, welche geometrischen Objekte durch vektorielle Gleichungen beschrieben werden, die durch ein konstantes Skalarprodukt charakterisiert werden. In Klassenstufe 9 haben wir Kreisgleichungen kennen gelernt, die nun so aussehen könnten (Radius : $\sqrt{k}$; $k \in \mathbb{R}^+$)

$\vec{x} \bullet \vec{x} = k \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = k$ oder $(\vec{x} - \vec{m}) \bullet (\vec{x} - \vec{m}) = k \;\Leftrightarrow\; (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = k$.

Im A^3 werden durch die vektoriellen Gleichungen natürlich Kugeln beschrieben. Doch davon später.

Wir wollen nun eine Richtung durch eine vektorielle Verschiebung $\vec{n}$ auszeichnen und untersuchen, wo alle Punkte X im A^3 liegen, für die gilt:

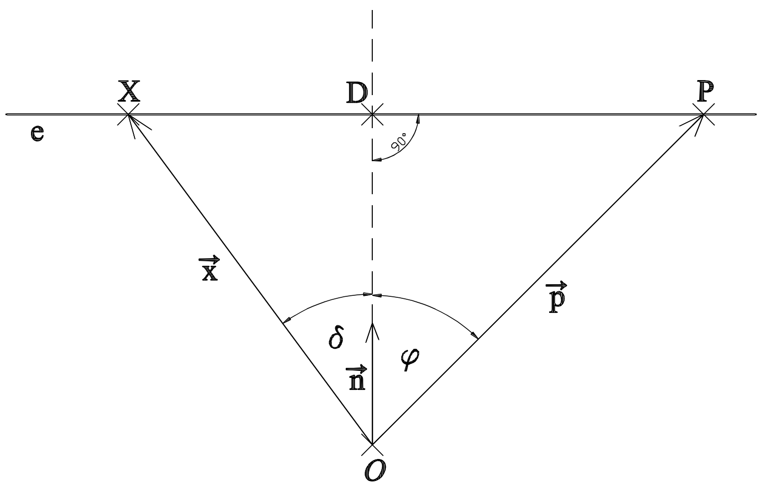
$$\vec{x} \bullet \vec{n} = k \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n}$$

denn man kann die Konstante k ja als Skalarprodukt der ausgezeichneten Verschiebung $\vec{n}$ mit einer festen Verschiebung $\vec{p}$ auffassen. In der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts bedeutet dies:

$$\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n} \;\Leftrightarrow\; |\vec{n}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\delta) = |\vec{n}| \cdot |\vec{p}| \cdot \cos(\varphi)$$

In der nebenstehenden zweidimensionalen Projektionsdarstellung gilt:

$$|\vec{x}| \cdot \cos(\delta) = |\vec{p}| \cdot \cos(\varphi) = \overline{OD}$$



d.h. alle Punkte X des A^3, die durch die obige, vektorielle Gleichung beschrieben werden, werden charakterisiert durch (Ursprungs-)Pfeile, deren Projektion auf die ausgezeichnete, durch $\vec{n}$ gekennzeichnete Richtung gleich ist (nämlich genauso groß, wie die Projektion des Ursprungspfeils für P auf die Richtung von $\vec{n}$).

Stellt man sich $|\vec{x}|$ und δ variabel vor (bei konstanter Länge von OD), sowie die gestrichelte Linie eventuell als Rotationsachse, so wird ersichtlich, dass die obige vektorielle Gleichung im A^3 eine Ebene **e**, senkrecht zur Richtung von $\vec{n}$, durch P, beschreibt. Teilt man die Gleichung noch durch $|\vec{n}|$, so gibt die Konstante den Abstand der Ebene zum Ursprung an.

Geometrische Maße

oder, ... wie kann man quantitative Aussagen über geometrische Objekte erhalten?

HNF **e**: $$\boxed{\frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{x} \bullet \vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{p} \bullet \vec{n}} \qquad \ldots = |\vec{p}| \cdot \cos(\varphi) = \overline{OD}$$

Eine solche Gleichung wird auch Hessesche Normalenform einer Ebenengleichung genannt, die Ausgangsform:

$$\boxed{\vec{x} \bullet \vec{n} = k \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n}}$$ heißt Normalenform.

---

5) a) Bestimme den Abstand der jeweiligen Ebenen zum Ursprung.[7] Gib auch die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch die Ebenen an.

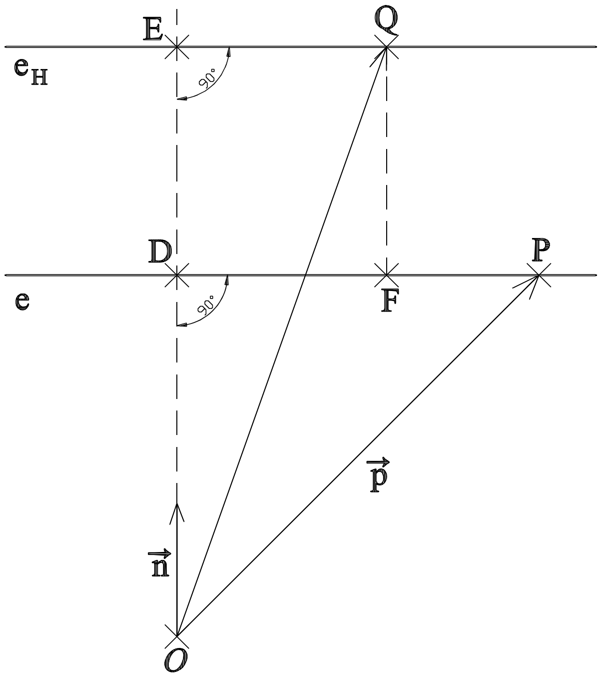
$$\mathbf{e_1}: \; 2\cdot x - 6\cdot y + 3\cdot z = -98 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -98$$

$$\mathbf{e_2}: \; 1\cdot x + 2\cdot y - 2\cdot z = 81$$

$$\mathbf{e_3}: \; \tfrac{3}{2}\cdot x - \tfrac{5}{4}\cdot y - \tfrac{9}{8}\cdot z = 15$$

b) Bestimme die Größen der Schnittwinkel α_1, α_2 und α_3, den die Gerade **g** aus Aufgabe 4) jeweils mit den drei Ebenen aus Teil a) einschließt.
Tipp: Betrachte zunächst den Winkel, den die Geradenrichtung und die Normalenrichtung einer Ebene miteinander einschließen.

c) Bestimme die Größen der Schnittwinkel, den die drei Ebenen aus Teil a) paarweise miteinander einschließen.
Tipp: Der Winkel zwischen den Normalenrichtungen und der Schnittwinkel zwischen den Ebenen sind kongruent.



d) Bestimme den Abstand des Punktes **Q** mit den Koordinaten (4 | 1 | 4) von der Ebene $\mathbf{e_1}$ aus Teil a).
Strategietipp: (siehe Prinzipskizze in Projektionsdarstellung) Lege zu einer Ebene **e** eine durch **Q** verlaufende parallele Hilfsebene $\mathbf{e_H}$ und bestimme von beiden Ebenen deren Abstand zum Ursprung.
(Alternative) Bestimme den Fußpunkt des Lotes von **Q** auf **e** durch Inzidenz der zugehörigen Lotgeraden mit **e.**

e) Bestimme die Koordinaten des Spiegelpunktes **Q'** von **Q** bei Spiegelung an der Ebene $\mathbf{e_1}$ aus Teil a). - Gib die Gleichung einer Kugel mit **QQ'** als Durchmesser an.

---

7 Die sogenannte Koordinatenform einer Ebenengleichung und die Normalenform stellt nur eine andere Schreibweise dar. Beachte, dass damit eine lineare Gleichung in 3 Variablen geometrisch im A^3 eine Ebene beschreibt, womit die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems von 3 Gleichungen in 3 Variablen geometrisch die Schnittmenge von 3 Ebenen ist. Welche wesentlich verschiedenen Möglichkeiten gibt es dabei?

Geometrische Maße

oder, ... wie kann man quantitative Aussagen über geometrische Objekte erhalten?

Nachtrag:

Der Übergang der Normalenform einer Ebenengleichung zu einer Parameterform ist unter Zurückführung auf das Zweidimensionale bei der Bestimmung geeigneter Richtungsvektoren sehr leicht. - Beispiel:

$$2\cdot x - 6\cdot y + 3\cdot z = -98 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -98 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \; ; \; r,t \in \mathbb{R}$$

Auch bei Inzidenzuntersuchungen ist die Normalenform i.a. rechentechnisch deutlich komfortabler und einer Parameterform vorzuziehen.