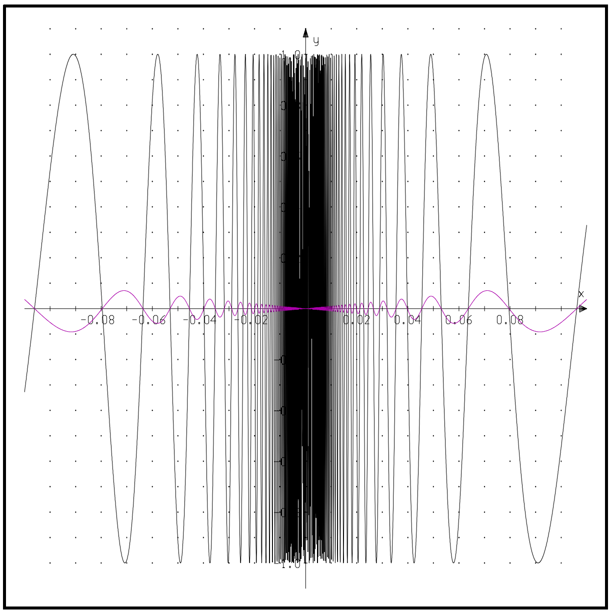
Zur (stetigen) Differenzierbarkeit / Monotoniesatz

Eine interessante Funktionenklasse



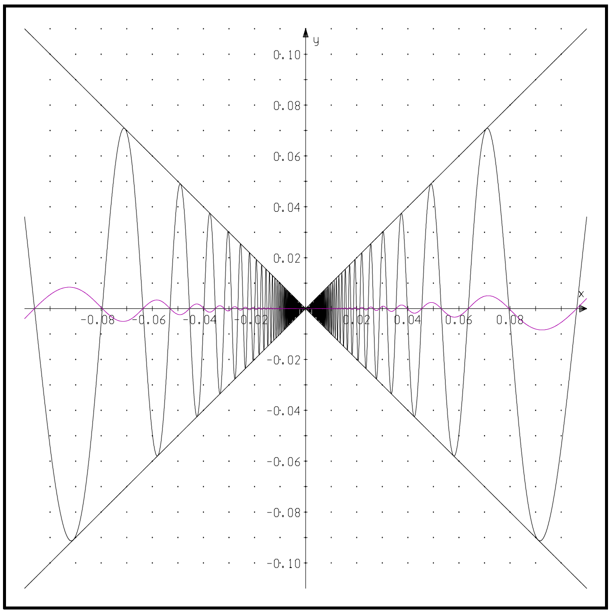
Eine chaotische Graphik!

Dargestellt sind die Graphen der Funktionen f_0 und f_1 der Funktionenschar f_n mit:

$$f_n(x) := x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Zeige, dass die Funktion f_0 im Ursprung nicht stetig ergänzbar ist! - Betrachte dazu die Nullfolge:

$$\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\frac{1}{n\cdot\pi + \frac{\pi}{2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} .$$



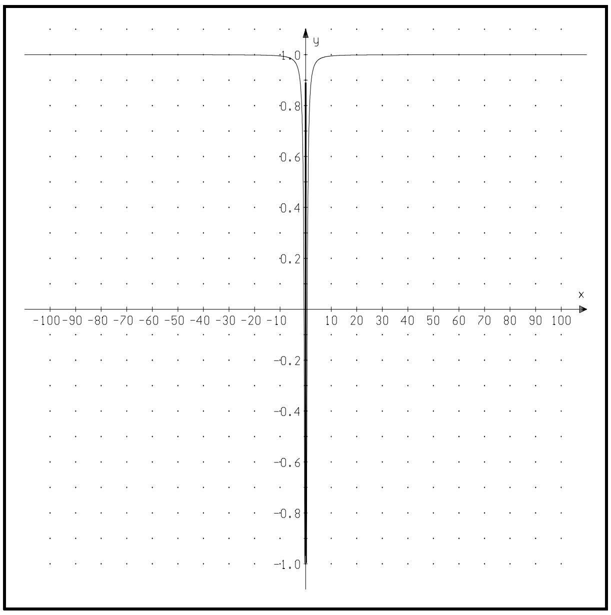
Da man bei dem oben gewählten Maßstab auf der y-Achse die Funktion f_1 schlecht erkennen kann, hier nun f_1 , zusammen mit zwei „einhüllenden" Graphen dargestellt.

Übrigens: Der kleine „wuselige" Graph ist f_2 !

2. Zeige, dass die Funktion f_1 an der Stelle 0 stetig ergänzbar ist. Verwende eine geeignete Doppelungleichung und definiere den Funktionswert an der Stelle 0 geeignet.

$f_1(0) :=$

....



Man sollte es nicht für möglich halten: Wählt man für die graphische Darstellung von f_1 ein (globales) relativ großes Intervall auf der x-Achse und nicht ein so kleines (lokales) in der Umgebung des Ursprungs, so ergibt sich nebenstehendes Bild.

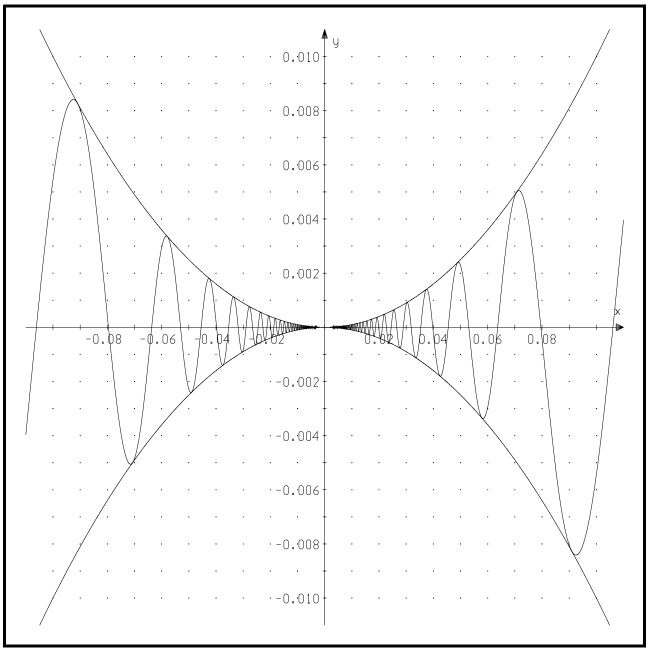
3. Zeige, dass sich der Graph von f_1 global asymptotisch einer Geraden parallel zur x- Achse im Abstand 1 nähert, d.h. dass gilt:

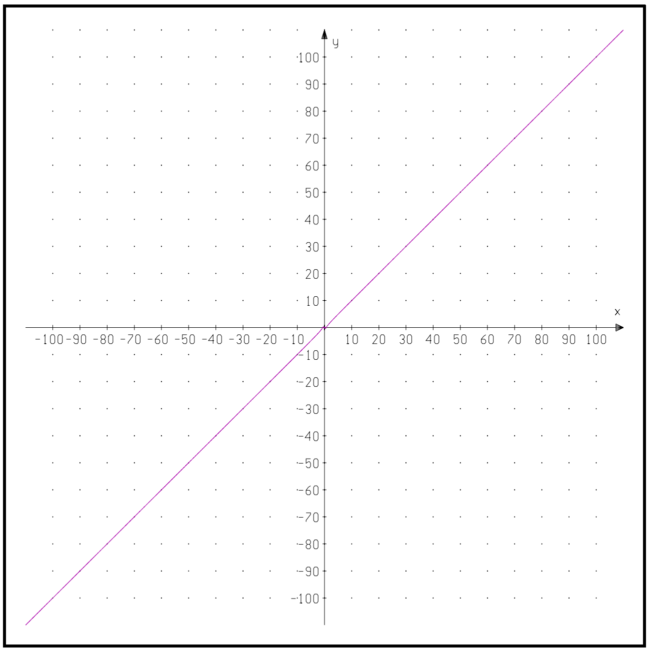
$$\lim_{|x|\to\infty} f_1(x) = 1 .$$

Wie sieht (global) der Graph von f_1 aus, wenn man im Funktionsterm **sin** durch **cos** ersetzt?

Zur (stetigen) Differenzierbarkeit / Monotoniesatz

Eine interessante Funktionenklasse

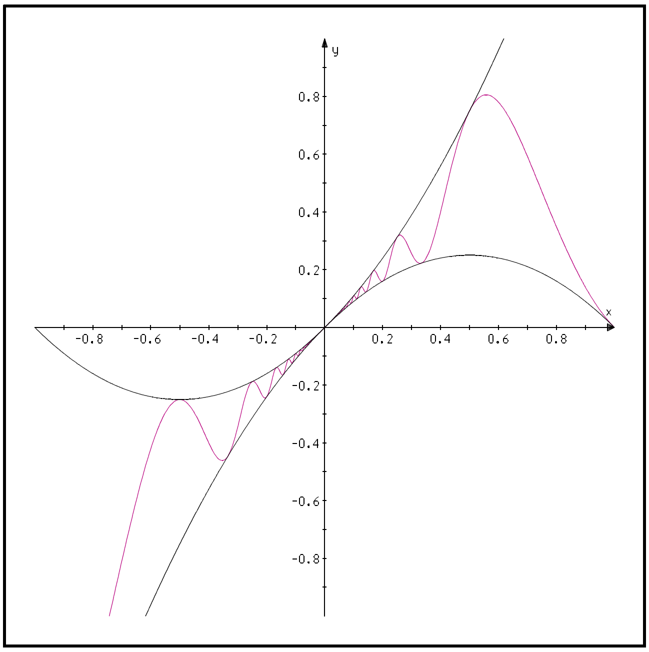




Hier nun, wiederum mit einem veränderten Maßstab, der Graph der Funktion f_2, links lokal mit zwei einhüllenden Graphen, rechts global dargestellt.

4. Zeige, dass die Funktion f_2 im Ursprung stetig ergänzbar ist, dort dann sogar differenzierbar, d.h. die Ableitungsfunktion f_2' ist auf $\mathbb{R}$ definierbar, f_2' ist jedoch (im Ursprung) unstetig.

5. Zeige, dass sich f_2 asymptotisch der Identität id nähert. - Wiederum: Wie sieht (global) der Graph von f_2 aus, wenn man im Funktionsterm **sin** durch **cos** ersetzt?



Im linken Diagramm ist nun eine Funktion g mit:

$$g(x) := x + x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

dargestellt. Dazu sind wiederum zwei einhüllende Graphen eingezeichnet.

6. Gib die Funktionsterme der beiden einhüllenden Funktionen an.

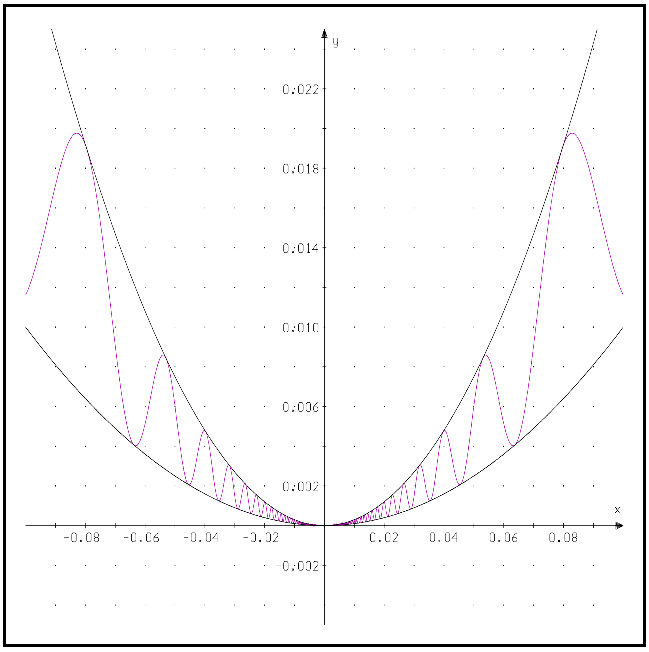
7. Zeige, dass mit geeigneten stetigen Ergänzungen gilt:

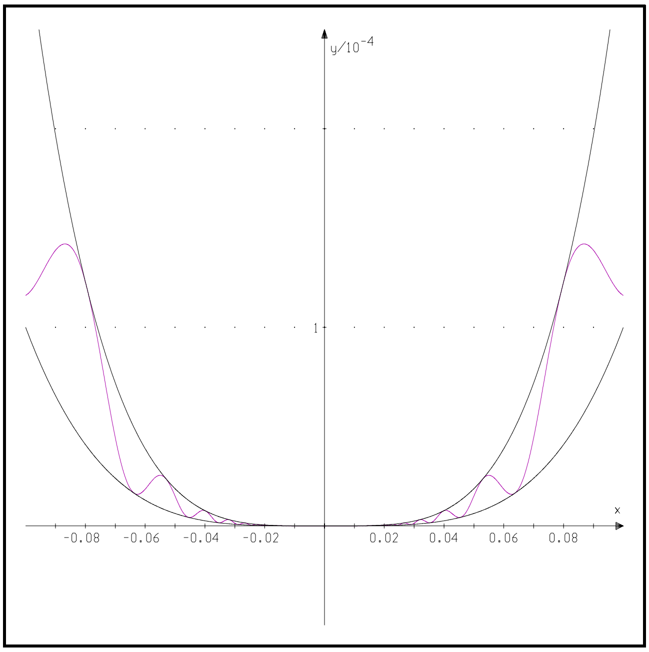
$$g'(0) = 1 > 0$$

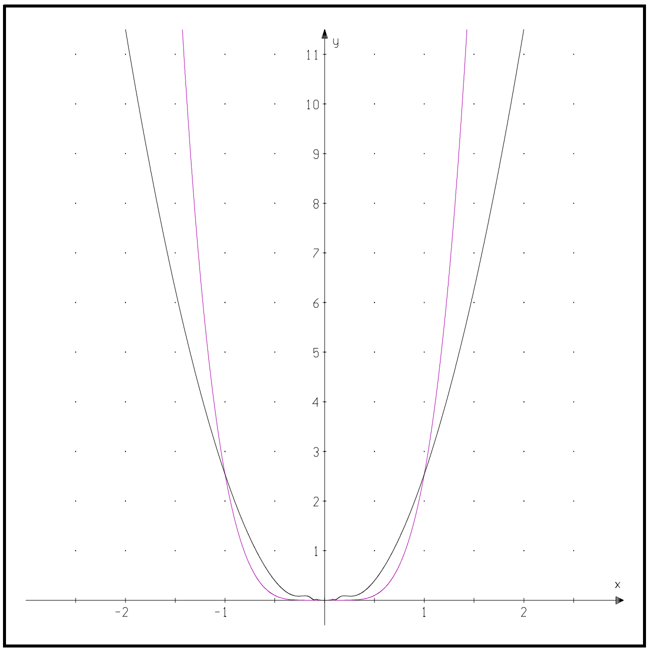
8. Untersuche, ob man aus der obigen Eigenschaft (7.) folgern kann, dass g an der Stelle 0 streng monoton wachsend ist. (Beachte, dass Differenzierbarkeit hier eine lokale Eigenschaft der Funktion an der Stelle 0 ist, während strenge Monotonie (global) den Vergleich zweier beliebiger Stellen aus einer $U_\varepsilon(0)$ meint).

Zur (stetigen) Differenzierbarkeit / Monotoniesatz

Eine interessante Funktionenklasse







Was kann man sonst noch an dieser Funktionenklasse erkennen?

Dargestellt sind, mit den zugehörigen einhüllenden Graphen, die Graphen der Funktionen h und i mit:

$$h(x) = 2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$i(x) = 2 \cdot x^4 + x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

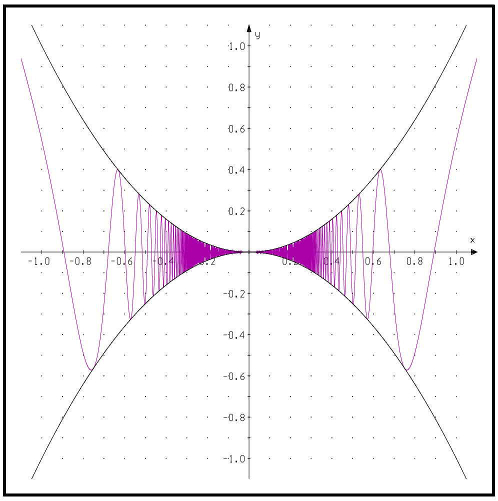
9. Zeige: Mit geeigneten stetigen Ergänzungen sind h und i im Ursprung differenzierbar, besitzen dort absolute Minima, das Vorzeichenwechselkriterium für relative Extrema ist jedoch nicht anwendbar. h' ist unstetig, i' stetig.

Ausblick (für alle, die schon wissen was Integrierbarkeit ist):

Die nebenstehend skizzierte Funktion (mit Einhüllenden) ist nicht f_2 sondern die Funktion j mit:

$$j(x) := x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

10. Zeige, dass j mit geeigneten stetigen Ergänzungen über $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, d.h. j besitzt die Stammfunktionseigenschaft, j' ist jedoch nicht integrierbar.



Zur (stetigen) Differenzierbarkeit / Monotoniesatz
Eine interessante Funktionenklasse

Nachtrag:

Der etwas schwierige Nachweis von Aufgabe 8, dass g in einer Umgebung $U_\varepsilon(0)$ nicht streng monoton wachsend sein kann:

Wir betrachten die 2 Nullfolgen: $\left\{ x_n \right\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{ \frac{1}{2\cdot n} \right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $\left\{ x_n' \right\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{ \frac{1}{2\cdot n-1} \right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Trivialerweise gilt: $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n' > x_n$

Zu zeigen ist: $g(x_n') < g(x_n)$

Für jedes Folgenglied x_n der ersten Folge liegt der Funktionswert auf der oberen (einhüllenden) Parabel mit der Funktionsgleichung: $p_o(x) = x + x^2$.

Für jedes Folgenglied x_n' der zweiten Folge liegt der Funktionswert auf der unteren (einhüllenden) Parabel mit der Funktionsgleichung: $p_u(x) = x - x^2$.

Wenn wir zeigen können, dass gilt: $p_o(x_n) > p_u(x_n')$

so sind die Funktionswerte "auf einem Weg nach rechts" gefallen!

$$\frac{1}{2\cdot n} + \frac{1}{4\cdot n^2} > \frac{1}{2\cdot n-1} - \frac{1}{(2\cdot n-1)^2}$$

$$\frac{2\cdot n+1}{4\cdot n^2} > \frac{2\cdot n-2}{(2\cdot n-1)^2}$$

$$(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n-1)^2 > 4\cdot n^2\cdot(2\cdot n-2)$$

$$(4\cdot n^2-1)\cdot(2\cdot n-1) > 8\cdot n^3-8\cdot n^2$$

$$4\cdot n^2-2\cdot n+1 > 0$$

$$n^2-\tfrac{1}{2}\cdot n+\tfrac{1}{4} > \left(n-\tfrac{1}{2}\right)^2 > 0$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist, und davor nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist der Nachweis der fehlenden (wachsenden) Monotonie erbracht, obwohl gilt: $g'(0) > 0$!