Zur Approximation von Funktionen durch ganzrationale Funktionen

Taylorreihenentwicklung

Betrachtet wird das Intervall [a ; b] mit dem Ziel, Informationen über den Funktionswert einer Funktion **f** an der Stelle **b** zu erhalten, wenn man den Funktionsverlauf der Funktion **f** an der Stelle **a** „vollständig“ kennt. - Offensichtlich gilt: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx$,

d.h. nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung unterscheiden sich die Funktionswerte um einen „mittleren Anstieg f′(c)“, multipliziert mit der Intervallbreite (b - a). Versucht man nun das Integral etwas genauer zu analysieren, so bietet sich der Trick der partiellen Integration mit der multiplikativen 1 an.

$$f(b) = f(a) + \int_a^b 1 \cdot f'(x)\,dx = f(a) + \Big[(x-b) \cdot f'(x) \Big]_a^b - \int_a^b (x-b) \cdot f''(x)\,dx$$

$$= f(a) - (a-b) \cdot f'(a) - \left[\tfrac{1}{2}\cdot(x-b)^2 \cdot f''(x) \right]_a^b + \int_a^b \tfrac{1}{2}\cdot(x-b)^2 \cdot f'''(x)\,dx$$

$$= f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \tfrac{1}{2}\cdot(a-b)^2 \cdot f''(a) + \left[\tfrac{1}{3!}\cdot(x-b)^3 \cdot f'''(x) \right]_a^b - \int_a^b \tfrac{1}{3!}\cdot(x-b)^3 \cdot f^{(4)}(x)\,dx$$

$$= f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \tfrac{1}{2}\cdot(b-a)^2 \cdot f''(a) - \tfrac{1}{3!}\cdot(a-b)^3 \cdot f'''(a) - \int_a^b \tfrac{1}{3!}\cdot(x-b)^3 \cdot f^{(4)}(x)\,dx$$

......

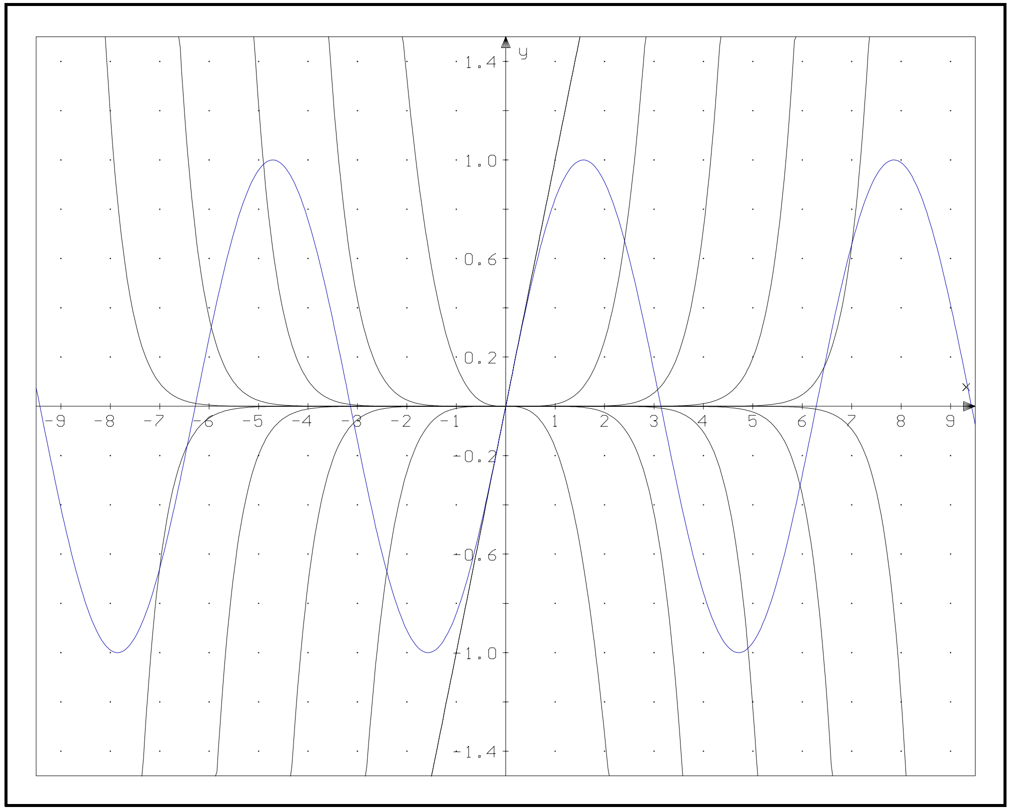
$$= f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \tfrac{1}{2}\cdot(b-a)^2 \cdot f''(a) + \tfrac{1}{3!}\cdot(b-a)^3 \cdot f'''(a) - \ \dots\ + \ \dots\ \dots\dots + \int_a^b \tfrac{1}{(n-1)!}\cdot(x-b)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x)\,dx$$

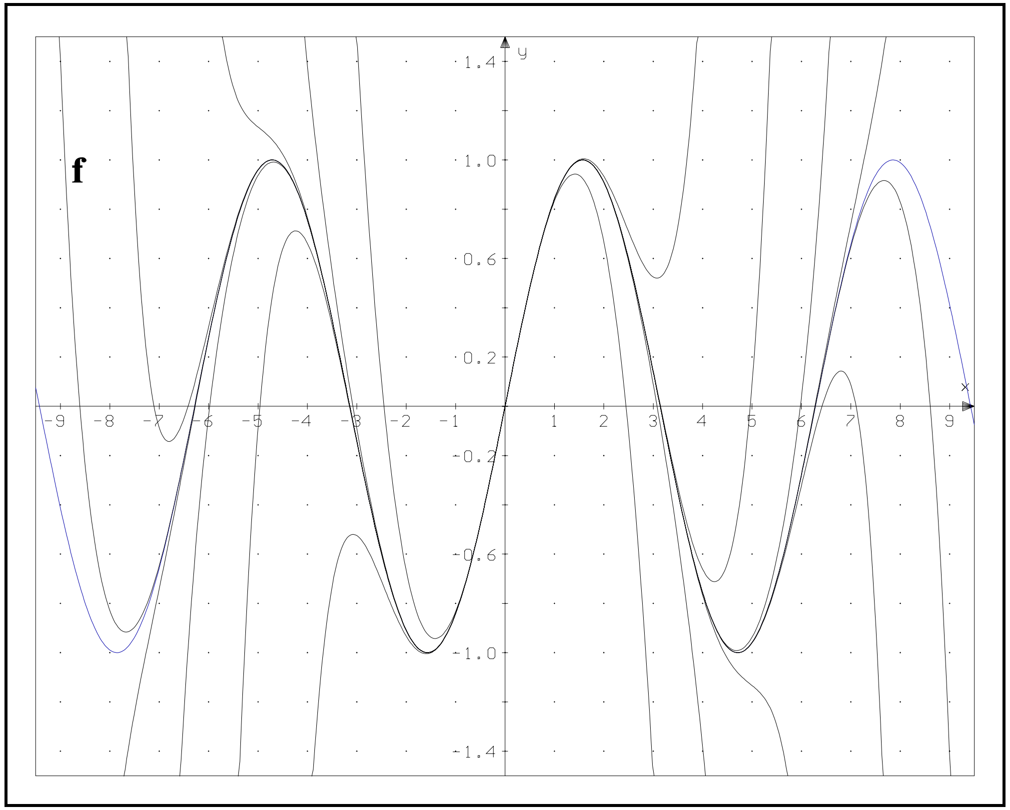
Wenn man wegen „Lustlosigkeit“ nun aufhört, sollte man das letzte Integral abschätzen! - Es sei: $0 < \vartheta < 1$ und n ungerade.

$$R_n(x) := \int_a^b \tfrac{1}{(n-1)!}\cdot(x-b)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x)\,dx = \frac{f^{(n)}\big(a+\vartheta\cdot(b-a)\big)}{(n-1)!} \cdot \int_a^b (x-b)^{n-1}\,dx = \frac{f^{(n)}\big(a+\vartheta\cdot(b-a)\big)}{n!} \cdot (b-a)^n$$

Der rechte Ausdruck heißt Restglied von Lagrange und benennt den maximalen Fehler, den man durch den vorzeitigen Abbruch begeht. In der mittleren Umformung geht ein Mittelwertsatz der Integralrechnung für Produktfunktionen ein (Existenzsatz! - Es gibt ein ϑ, ...), den wir uns auf der Schule nur plausibel machen. - Versuche bei der folgenden Approximation der Sinusfunktion, die Größe des Restgliedes jeweils abzuschätzen.

<u>Zur Approximation der Sinusfunktion durch ganzrationale Funktionen</u>





a) Beschrifte im linken Diagramm die ‘Äste’ der einzelnen Funktionsgraphen mit den zugehörigen Funktionstermen!

b) Gib die Funktionsgleichung der im rechten Diagramm gekennzeichneten Funktion **f** an!

c) Es gilt: $\mathbf{sin}(x) := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$. Gib eine entsprechende Definition für **cos**(x) an! **cos**(x) :=

d) Bestimme (unter Voraussetzung der Existenz der Grenzwerte): **cos**(x) + **i** · **sin**(x) =