Herder-Oberschule
Gymnasium
Seit 1903

Schulinterner Plan[1] für den Zusatzunterricht im Fach

MATHEMATIK

im Profilzug

[1] Entwurf

Stand: 20.04.2006

Klasse 7

(30 Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Zahlen:** Zeichen für Zahlen, Fehler, Stellenwertsysteme	12 Stunden	2
2	**Kombinatorik:** Zählprinzipien	12 Stunden	3
3	**Geometrie:** Begründen und Beweisen, vertiefende geometrische Sätze	6 Stunden	4

Zeitliche Grundlage des Plans ist ein wöchentlicher Zusatzunterricht von 1 Unterrichtsstunde, d.h. es wurden planerisch 30 (Netto-) Jahresstunden in Ansatz gebracht, womit alle Ausfallzeiten durch Ferien, Klassenarbeiten, Betriebspraktika, Exkursionen, Klassenfahrten etc. berücksichtigt wurden.

Zahlen: Zeichen für Zahlen, Fehler, Stellenwertsysteme
12 Stunden

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Unendlich periodische Dezimalbrüche in (gemeine) Brüche umwandeln können - und umgekehrt. Einblick in die rechentechnische Problematik der Dezimalschreibweise für unendlich periodische Dezimalzahlen besitzen. Taschenrechnerdarstellung unendlicher periodischer Dezimalbrüche als Näherungswert erkennen und Fehler abschätzen können.	Umwandlung unendlich periodischer Dezimalbrüche in (gemeine) Brüche - und umgekehrt. Brüche mit dem Taschenrechner als Ergebnis einer Division darstellen; z.B.: $\frac{2}{3} = 0{,}666\underline{7}$, aber $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0{,}3333 + 0{,}3333 = 0{,}666\underline{6}$; $\frac{1}{7} = 0{,}1\underline{428571}$ im Vergleich mit $\frac{3}{7} = 0{,}\underline{428571}4$, usw.	Die Umwandlung von endlichen Dezimalzahlen in Brüche (und umgekehrt) ist aus der Einheit "Elementare Prozentrechnung" bekannt und in einigen Übungen zu wiederholen. Zur Beurteilung der Taschenrechnerdarstellung eines unendlichen, periodischen Dezimalbruchs gehört auch die Frage, wie man in der Taschenrechnerdarstellung eine Periodizität erkennt oder vermutet. Die Bestätigung kann dann über eine Proberechnung durch geeignete Multiplikation erfolgen.
Rundungsregel kennen und anwenden können. Auswirkung der Güte von Eingangsgrößen auf das Ergebnis erkennen und abschätzen können. Schätzwerte für Ergebnisse verschiedener Rechenoperationen angeben können.	Rundungsregel, Stellenwertsystem, unterschiedliche Genauigkeit von Näherungswerten. Näherungswerte von Summen und Produkte von Näherungswerten; Betrachtung der nicht gesicherten Stellen im Verlauf der Rechnung. Überschlagsrechnungen; sinnvolles Runden von Größen.	Hierbei ist nur an die Formulierung entsprechender Faustregeln gedacht. Hier bieten sich Beispiele aus Physik und Chemie an.
Die wertmäßige Bedeutung von gleichen Ziffern an gleicher Stelle in unterschiedlichen Stellenwertsystemen angeben können.	Darstellung von natürlichen Zahlen im Dualsystem, Stufenzahlen (Vergleich der Systeme), Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen - und umgekehrt; ein weiteres Zahlsystem, z.B. Oktalsystem oder Se-(Hexa-)dezimalsystem.	Die Ausführung von Rechenoperationen in anderen Zahlsystemen, insbesondere die Multiplikation und Division z.B. von Dualzahlen, kann je nach Zeit als Ergänzung und Vertiefung in Betracht kommen.

Kombinatorik: Zählprinzipien

12 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Die Summenformeln: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} (2\cdot i-1) = n^2$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ kennen und ihre Herleitung erläutern können. Den Wert einer Summe, die aus den obigen Standardtermen kombiniert wurde, bestimmen können.	Formeln für die Summe der ersten - n natürlichen Zahlen - n ungeraden Zahlen - n Quadratzahlen - n Kubikzahlen. Summenschreibweise geeigneter Summen mit gleichstrukturierten Summanden. Beispiele wie: $\sum_{i=5}^{13} 2\cdot i$, $\sum_{i=6}^{12} (3\cdot i^2+i^3)$, $\sum_{i=1}^{10} (4\cdot i-2)$.	Die Gaußsche Summe kann nach dem historischen Weg, aber auch durch geeignete graphische Abzählstrategien erarbeitet werden. Für die weiteren Summen bietet sich jedoch ein Weg über graphische Hilfsmittel an . Beweise im mathematisch strengen Sinne sind hier nicht erforderlich, sie können gegebenfalls im Rahmen der Einheit: Vollständige Induktion (Klasse 8) problematisiert werden.
Die Bedeutung des Fakultätssymbols kennen und n! (prinzipiell) berechnen können. Wissen, dass es n! Permutationen aus n (verschiedenen) Elementen gibt. Eine geeignete Strategie (Modell) zur Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten bei einer geordneten Auswahl kennen und anwenden können.	Abzählprinzipien in einfachen Fällen: Permutationen. Auswahl von **k aus n** Elementen, unter Berücksichtigung der Reihenfolge, mit der Anzahl der Möglichkeiten: $\frac{n!}{(n-k)!}$.	z.B.: Sitzverteilung, Turmproblem (Schach) etc. z.B.: Sitzverteilung mit Freiplätzen, Autonummern etc. Zur Verdeutlichung kann auch ein Baumdiagramm hilfreich sein.
Den Wert von Binomialkoeffizienten in einfachen Fällen bestimmen können. Einige Problemstellungen, bei denen Binomialkoeffizienten auftreten, angeben können. Den mathematischen Hintergrund des **Pascalschen Dreiecks** kennen und erläutern können.	Auswahl von **k aus n** Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit der Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Pascalsches Dreieck.	Zur Herleitung kann u.a. auf ein rekursives Verfahren zurückgegriffen werden. Als Anwendungen kommen Lotto, der binomische Lehrsatz u.ä. in Frage, wobei zu beachten ist, dass die Herleitung rein kombinatorisch erfolgen soll. Die binomischen Formeln (n=2) werden in Klassenstufe 8 im Rahmen der Algebra (Faktorisierung einer Summe) behandelt.

Geometrie: Begründen und Beweisen, vertiefende geometrische Sätze
6 Stunden

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Sätze über die Winkelsumme im n-Eck und über die Außenwinkel kennen, begründen und anwenden können.	Winkelsumme im n-Eck, Außenwinkel am n-Eck. Konstruktion regelmäßiger n-Ecke mit vorgegebener Seitenlänge.	Bei der Konstruktion (ohne das Hilfsmittel eines Außenkreises mit entsprechend eingeteiltem Zentriwinkel) ist ein hohes Maß an konstruktiver Präzision gefordert.
Wissen und begründen können, dass die Mittelparallele im Dreieck halb so lang wie die Grundseite ist.	Mittelparallele (Strecke) im Dreieck.	Der Satz ist eine Voraussetzung für den Satz über die Seitenhalbierenden und dient der Festigung der Kongruenzsätze und der Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen.
Wissen, dass alle 3 Seitenhalbierenden eines Dreiecks durch einen Punkt S verlaufen, dass S der "Schwerpunkt" des Dreiecks ist, und beweisen können, dass S jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt.	Satz über die Seitenhalbierenden eines Dreiecks.	Durch fortlaufende Neukonstruktion eines Mittendreiecks kann bei der Begründung, dass alle Seitenhalbierenden durch einen Punkt verlaufen, schon ein (naiver) infinitesimaler Grenzwertgedanke eingebracht werden.
Den Umfangs- (Peripherie-) winkelsatz am Kreis kennen und Beweisschritte am ausgewählten Beispiel begründen können. Die Umkehrung des Satzes formulieren können.	Umfangs- (Peripherie-) winkelsatz am Kreis und seine Umkehrung.	Der Satz des Thales soll als Spezialfall des Umfangswinkelsatzes erkannt werden.
Die Sätze über das Kreisviereck und den Sehnen-Tangentenwinkel am Kreis kennen und beweisen können. Die Umkehrung des Satzes über das Kreisviereck formulieren können.	Satz über das Kreis- (Sehnen-) viereck und seine Umkehrung. Satz über den Sehnen-Tangenten-Winkel.	Ein Endpunkt der Sehne ist Scheitelpunkt des Winkels, die Tangente in diesem Punkt und die Sehne bilden die Schenkel.
Den Satz über das Tangentenviereck kennen und beweisen können.	Satz über das Tangentenviereck.	
Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus geeigneten Maßen bestimmen können. Den Radius r_i des Innenkreises rechnerisch bestimmen können.	Flächeninhalt eines Dreiecks, u.a. $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot U \cdot r_i$.	Hier spielt der Gedanke der Flächenverwandlung zu einem Rechteck durch Zerschneiden und neu Zusammenlegen eine besondere Rolle

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
	<u>nach Zeit:</u> *Satz über die Ankreise eines Dreiseits.* *Satz über den Neunpunktekreis (Feuerbachkreis).*	Diese beiden Sätze dienen einem vertieften Verständnis von Winkelhalbierenden und Höhen. Es kann auch schon genügen, nur die Aufgabe zu stellen, einen Ankreis an ein Dreiseit zu konstruieren.
	Satz über die Eulersche Gerade, *Satz von Desargues,* *Satz von Pappus-Pascal.*	Hier kann man nur, evtl. im Sinne eines "krönenden Abschlusses", die Sätze propädeutisch-konstruktiv behandeln.

Klasse 8

(30 Stunden)

	Lernabschnitte	Richtzeiten	Seite
1	**Geometrie:** Gruppe der Kongruenzabbildungen	8 Stunden	7
2	**Vollständige Induktion:** Aussagenlogische Verknüpfungen und Induktion	22 Stunden	8

Zeitliche Grundlage des Plans ist ein wöchentlicher Zusatzunterricht von 1 Unterrichtsstunde, d.h. es wurden planerisch 30 (Netto-) Jahresstunden in Ansatz gebracht, womit alle Ausfallzeiten durch Ferien, Klassenarbeiten, Betriebspraktika, Exkursionen, Klassenfahrten etc. berücksichtigt wurden.

Geometrie: Gruppe der Kongruenzabbildungen

8 Stunden

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Wissen und begründen können, dass jede Kongruenzabbildung als Hintereinanderausführung von 2 oder 3 Achsenspiegelungen aufgefasst werden kann. An Beispielen bestätigen können, dass die Achsenspiegelungen, welche eine bestimmte Kongruenzabbildung repräsentieren, i.a. nicht eindeutig festgelegt sind. Spiegelachsen angeben können, die bei Hintereinanderausführung der Achsenspiegelungen eine Figur auf sich selbst abbildet. An konkreten Beispielen zu einer Kongruenzabbildung die zugehörige inverse Kongruenzabbildung angeben können.	Gleichsinnige und ungleichsinnige Kongruenzabbildungen: Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Verschiebung, Drehung und deren Hintereinanderausführung. Konstruktion von Spiegelachsen bei vorgegebenen kongruenten Figuren (z.B. Dreiecken), welche die Figuren bei Hintereinanderausführung ineinander überführen. Konstruktive Darstellung des (universell) neutralen und des (individuell) inversen Elements in der Gruppe der Kongruenzabbildungen.	Die Einheit dient der strukturellen Vertiefung der Geometrieeinheit des Normalzuges und ist in diese Lerninhalte sinnvoll zu integrieren.
Wissen, dass die Hintereinanderausführung von Achsenspiegelungen sowohl assoziativ als auch kommutativ sein kann: - Wissen, dass das Assoziativgesetz immer gültig ist, - im gegebenen Fall entscheiden können, ob das Kommutativgesetz gilt.	Untersuchung auf Kommutativität und Assoziativität bei der Hintereinanderausführung von Achsenspiegelungen an ausgewählten Beispielen. Als Ergebnisse geeigneter Konstruktionen kommen in Frage: **Das Assoziativgesetz**: $S_i \circ (S_h \circ S_g) = (S_i \circ S_h) \circ S_g$, ist immer gültig. **Das Kommutativgesetz** gilt im allgemeinen nicht, d.h. es gilt: - für $(g \parallel h) \wedge (g \neq h)$ gilt i.a.: $S_h \circ S_g \neq S_g \circ S_h$, - ebenso für $(g \cap h =: \{Z\}) \wedge (\measuredangle(g;h) = \varepsilon) \wedge (0° < \overline{\varepsilon} \leq 90°)$ gilt i.a.: $S_h \circ S_g \neq S_g \circ S_h$, - für Verschiebungen (Translationen) bzw. Drehungen mit festem Drehzentrum gilt: $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ bzw. $D_{Z,\alpha} \circ D_{Z,\beta} = D_{Z,\beta} \circ D_{Z,\alpha}$, - für $g \perp h$ gilt: $S_h \circ S_g = S_g \circ S_h$.	Es bietet sich an, bei der zusammenfassenden Darstellung der Gruppenaxiome einen Bezug zu den Zahlenmengen mit den Verknüpfungen „+“ und „·“ herzustellen. Bei der Behandlung des Assoziativgesetzes sind die Teilabbildungen i.a. unterschiedlich: Ungleichsinniger Fall: (1) Erst spiegeln, dann drehen; (2) Erst verschieben, dann spiegeln.

Vollständige Induktion: Aussagenlogische Verknüpfungen und Induktion

22 Stunden

<table>
<tr><th>Unterrichtsziele</th><th>Unterrichtsinhalte</th><th>Erläuterungen</th></tr>
<tr>
<td>Wissen, wie Aussagen mit den Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verknüpft werden und in Anwendungen ausführen können.

Die Äquivalenz aussagenlogischer Terme über Wahrheitstafeln in einfachen Fällen nachweisen können.</td>
<td>Die Konjugation, Disjunktion und Negation mit zugehörigen Wahrheitstafeln.

Äquivalenz aussagenlogischer Terme in exemplarischen, einfachen Fällen.</td>
<td>Hier kommen Distributivgesetze und die Regeln von dé Morgan in Betracht. Auf eine sprachliche Interpretation sollte geachtet werden.</td>
</tr>
<tr>
<td>An Beispielen der Umgangssprache angeben können, ob bei subjunktiv verknüpften Aussagen die Teilaussagen inhaltlich verknüpft sind oder nicht.

Die Wahrheitstafel der Subjunktion kennen und an Beispielen anwenden können.

Kennen der Äquivalenz der Subjunktionen:
$p \rightarrow q$ und $(\neg q \rightarrow \neg p)$

Die Bisubjunktion sprachlich formulieren und die zugehörige Wahrheitstafel angeben können.</td>
<td>Analyse umgangssprachlicher, subjunktiver (wenn-dann) Aussagen.

Wahrheitstafel für die Subjunktion mit Beispielen:
<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \rightarrow q$</th></tr><tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr><tr><td>w</td><td>f</td><td>f</td></tr><tr><td>f</td><td>w</td><td>w</td></tr><tr><td>f</td><td>f</td><td>w</td></tr></table>
Subjunktion und Negation; Bisubjunktion.</td>
<td>Als Beispiel kann ein Satz wie: "Wenn ich mich gut auf die Mathematikarbeit vorbereite, schreibe ich keine Fünf" dienen, denn nur wenn man sich gut vorbereitet und dennoch eine Fünf schreibt, wird der Satz auch als falsch empfunden.

Umgangssprachliche Beispiele wie:
- Wenn es geregnet hat, ist die Straße nass.
- Wenn die Straße nass ist, hat es geregnet.
- Wenn die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet.
verdeutlichen den Umgang mit Satz und Kehrsatz sowie Subjunktion und Negation.</td>
</tr>
</table>

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
An Beispielen nachweisen können, dass: (1) Aussageformen über der Grundmenge $\mathbb{N}^*$ für jede Einsetzung unwahr sind, obwohl die Subjunktion $A(n) \rightarrow A(n+1)$ wahr ist, (2) Aussageformen bei endlich vielen, konkreten Einsetzungen wahr sein können, jedoch nicht allgemeingültig sind.	Aussageformen und Subjunktion. Notwendigkeit der beiden Nachweisteile für Allgemeingültigkeit: (1) A(1) ist wahr, (2) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}^*} A(n) \rightarrow A(n+1)$.	Es bietet sich an, den Bezug zum 5. Peanoaxiom zu thematisieren. Es ist nicht erforderlich zu betonen, dass die Implikation (Folgerung) eine allgemeingültige Subjunktion über der Grundmenge $\mathbb{N}^*$ darstellt.
Induktionsbeweise in konkreten, einfachen Fällen durchführen können.	Induktionsbeweise bei Summenformeln, Teilbarkeitsaussagen und einfachen Ungleichungen.	Für konkrete Beispiele ist hinreichend Zeit vorzusehen. Bei der Auswahl der Beispiele sind natürlich durch die Altersstufe Beschränkungen notwendig. Allerdings bietet sich in späteren Klassenstufen an geeigneten Stellen ein Wiederaufgreifen an.

Klasse 9

(30 Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Lineare Optimierung**	14 Stunden	11
2	**Geometrie:** Scherung, Hintereinanderausführung Zentrischer Streckungen	16 Stunden	13

Zeitliche Grundlage des Plans ist ein wöchentlicher Zusatzunterricht von 1 Unterrichtsstunde, d.h. es wurden planerisch 30 (Netto-) Jahresstunden in Ansatz gebracht, womit alle Ausfallzeiten durch Ferien, Klassenarbeiten, Betriebspraktika, Exkursionen, Klassenfahrten etc. berücksichtigt wurden.

Lineare Optimierung

14 Stunden

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Wissen, dass die Lösungen zu einer Linearen Ungleichung in 2 Variablen Zahlenpaare sind und dass die zugehörigen Punkte in einer durch die Lösungen von: $a \cdot x + b \cdot y = c$ begrenzten Halbebene liegen.	Lineare Ungleichungen der Form: $a \cdot x + b \cdot y \leq c$ ($a \cdot x + b \cdot y \geq c$) und die graphische Darstellung der zugehörigen Lösungsmengen.	Anknüpfung an die Unterrichtseinheit des Normalplanes für Klassenstufe 8: 'Systeme linearer Gleichungen'. Der unterschiedlichen Darstellung der Lösungsmenge bezüglich verschiedener Grundmengen, z.B.: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (diskrete Punkte bzw. zusammenhängende Fläche), sollte Beachtung geschenkt werden.
Wissen, dass die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems Schnittmenge der Lösungsmengen aller einzelner Ungleichungen ist, und die zugehörige Punktmenge graphisch bestimmen können.	Systeme linearer Ungleichungen mit 2 Variablen und ihre graphische Lösung.	
Wissen, dass durch verschiedene Einsetzungen für die Formvariable n in: $y = m \cdot x + n$ (m fest) eine Schar paralleler Geraden beschrieben wird.	Lineare Gleichungen in Normalenform $y = m \cdot x + n$ mit Parametern, insbesondere: m fest, n variabel.	
Anwendungsaufgaben zur Linearen Optimierung mit 2 Variablen durch ein zeichnerisches Verfahren lösen können. Begründen können, dass allen Paaren, deren zugehörige Punkte auf einer bestimmten Geraden liegen, derselbe Funktionswert der Zielfunktion zugeordnet ist.	Optimale Funktionswerte einer linearen (Ziel-)Funktion ($b \neq 0$) $\mathbf{f} : (x ; y) \mapsto z \mid z = a \cdot x + b \cdot y$, deren Definitionsmenge die Lösungsmenge eines Linearen Ungleichungssystems ist (zulässiger Bereich). Zeichnerische Ermittlung des optimalen Funktionswertes durch Parallelverschiebung von Geraden zu: $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{z}{b}$, z variabel, im zulässigen Bereich. - Lösungen der Optimierungsaufgabe als Punkte des zulässigen Bereichs.	
Entscheiden können, ob eine Optimierungsaufgabe Lösungen besitzt, und die Lage des (oder der) Lösungspunkte(s) eingrenzen können.	Erarbeitung eines Eckenkriteriums, wenn die Grundmenge des Ungleichungssystems: $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$ ist. - Überprüfung des Kriteriums, wenn die Grundmenge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist.	Ist eine Optimierungsaufgabe lösbar, so ist mindestens ein Lösungspunkt ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs.

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Lineare Gleichungen mit 3 Variablen in Achsenabschnittsform umwandeln können und die Lösungsmenge in einfachen Fällen als Teil einer Ebene im dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen können. Lineare Ungleichungen mit 3 Variablen in einfachen Fällen graphisch interpretieren können. Das graphische Lösungsverfahren für lineare Ungleichungssysteme in 2 Variablen auf Systeme von nicht mehr als 3 lineare Ungleichungen in drei Variablen übertragen können.	Lineare Gleichung mit 3 Variablen (Ebenengleichung) in Achsenabschnittsform: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; graphische Lösung für den Fall a>0, b>0, c>0 und die Grundmenge $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$. Lineare Ungleichung mit 3 Variablen in der Form: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \leq d$ mit a, b, c, d > 0 über der Menge $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$. Systeme linearer Ungleichungen und ihre zeichnerische Lösung mit Hilfe von 'Begrenzungsebenen'.	Über die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen und die Spurgeraden kann das Verständnis für die Ebenengleichung systematisch aufgebaut werden. Dabei ist auch an die Darstellung von konkreten Punkten im 3-dimensionalen Koordinatensystem als Eckpunkt eines Quaders, der dem Ursprung gegenüberliegt, gedacht. Durch die genannten Einschränkungen liegen die zugehörigen Punkte der Lösungsmenge einer Ungleichung stets im 1. Oktanten. Das Gebiet enthält den Ursprung und wird durch die 3 Koordinatenebenen, sowie durch die Ebene mit der Gleichung: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ begrenzt.
Anwendungsaufgaben zur linearen Optimierung mit 3 Variablen in einfachen Fällen lösen können.	Optimale Funktionswerte einer linearen Funktion $\mathbf{f} : (x ; y ; z) \mapsto w \mid w = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$, die auf der Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems definiert ist. Lösungen der Optimierungsaufgabe als Eckpunkte des zulässigen Bereichs.	Durch die Darstellung des zulässigen Bereichs der Optimierungsaufgabe kann das räumliche Anschauungsvermögen geschult werden. Durch die Beschränkung auf die Grundmenge $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$, für die das Eckenkriterium gilt, kann die Lösung der Optimierungsaufgabe durch die Berechnung der Werte der Zielfunktion in den Ecken des zulässigen Bereichs ermittelt werden.

Geometrie: Scherung, Hintereinanderausführung zentrischer Streckungen, *Ähnlichkeit*

16 Stunden

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Wissen, dass eine Scherung eine Punktabbildung der Ebene auf sich ist, und eine Definition dieser Abbildung angeben können. Wissen, dass jeder Punkt F der Achse **a** Fixpunkt der Abbildung ist und umgekehrt jeder Fixpunkt der Scherung Element von **a** ist. Beliebige Punkte der Ebene durch Scherung abbilden können. Begründen können, dass die Scherung geraden-, parallelen-, mittelpunkts- und flächeninhaltstreu ist. Figuren durch Hintereinanderausführung verschiedener Scherungen abbilden können.	Die Scherung als Punktabbildung der Ebene auf sich. Def.: Eine Abbildung $\mathbf{f}: P \mapsto P'$ heißt Scherung an der Achse (Gerade) **a** um den (orientierten) Winkel γ, wenn $PP' \parallel \mathbf{a}$ und $\overline{\sphericalangle PFP'} = \overline{\gamma}$ $(\overline{\gamma} \neq 0°)$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von P auf **a** ist. Abbildung von Punkten, Strecken, Geraden, Dreiecken und Vierecken. Hintereinanderausführung verschiedener Scherungen.	Es empfiehlt sich, den ersten Teilabschnitt vor dem Lernabschnitt: 'Satzgruppe des Pythagoras' zu behandeln, da z.B. der Kathetensatz des Euklid organisch aus der Flächenverwandlung von Rechtecken über eine Doppelscherung herleitbar ist. - Zum Beweis der Geradentreue der Scherung benötigt man Strahlensätze. Bildet man Strecken durch Scherung ab, die auf zur Achse **a** parallelen Geraden liegen, so lässt sich unmittelbar begründen, dass Original- und Bildstrecke gleich lang sind. Durch diesen Sachverhalt kann gut das Prinzip des Cavalieri vorbereitet werden.
Eine Abbildungsvorschrift für die zentrische Streckung kennen. Durch zentrische Streckung ähnliche Figuren erzeugen können. Die Geraden-, Winkel- und Parallelentreue der zentrischen Streckung begründen können. Figuren durch zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor abbilden können. Wissen, dass für Flächeninhalte der Streckungsfaktor k^2, für Rauminhalte k^3 ist.	Zentrische Streckung als Abbildung der Ebene auf sich. Maßstabsgerechte Vergrößerung und Verkleinerung von Figuren durch zentrische Streckung mit positivem Streckfaktor. Geraden-, Winkel- und Parallelentreue der zentrischen Streckung. Maßstabsgerechte Vergrößerung und Verkleinerung von (räumlichen) Figuren durch zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor.	Die nebenstehenden Ziele und Inhalte sind mit den oberen didaktisch sinnvoll zu verbinden.

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Figuren durch mehrere zentrische Streckungen mit gleichem Streckzentrum hintereinander abbilden können. Wissen und begründen können, dass für die Hintereinanderausführung gilt: $\mathbf{S}_{Z,k2} \circ \mathbf{S}_{Z,k1} = \mathbf{S}_{Z,k1 \cdot k2}$. Figuren durch zwei zentrische Streckungen mit verschiedenen Streckzentren hintereinander abbilden können. Wissen, dass die Verkettung zweier zentrischer Streckungen entweder a) eine zentrische Streckung ist mit: $k_3 = k_1 \cdot k_2$ und $Z_3 \in g(Z_1;Z_2)$, oder b) eine Verschiebung $\vec{\mathbf{v}}$.	Verketten zentrischer Streckungen mit gleichem Streckzentrum. Die Gruppe der zentrischen Streckungen mit gleichem Streckzentrum; die Menge $\mathbf{S_Z}$. Verketten zentrischer Streckungen mit verschiedenen Streckzentren: a) $k_2 \neq \frac{1}{k_1}$; die Menge $\mathbf{S}$, die Gerade $g(Z_1;Z_2)$ als Fixgerade, b) $k_2 = \frac{1}{k_1}$; die Menge $\mathbf{V}$.	Aus strukturellen Erwägungen sollte insbesondere auch der Fall: $k_1 \cdot k_2 = 1$ betrachtet werden.
An geeigneten Beispielen konstruktiv nachweisen können, dass das Assoziativgesetz in $\mathbf{S}$ und $\mathbf{V}$ gilt. Die Gruppenaxiome nennen und begründen können, dass $\mathbf{S}$ alleine <u>keine</u> Gruppe bildet. An geeigneten Beispielen die fehlende Kommutativität, die Existenz des (individuellen) Inversen sowie die Existenz des (universellen) Neutralen (als Element von $\mathbf{V}$ oder $\mathbf{S}$) nachweisen können.	Die (nichtkommutative) Gruppe $\mathbf{S} \cup \mathbf{V}$ der perspektiven Ähnlichkeitsabbildungen.	An entsprechenden Stellen sollte von der Möglichkeit des strukturellen Vergleichs zu den Zahlenmengen Gebrauch gemacht werden. Es erscheint nicht notwendig, den Begriff der Untergruppe besonders zu problematisieren.
Punkte im Koordinatensystem durch Scherung und zentrische Streckung abbilden können. Für geeignete, einfache Beispiele die zur Scherung, zentrischen Streckung, Punkt- und Achsenspiegelung gehörende affine Abbildung bei Vorgabe von 3 Punkten mit den zugehörigen Bildpunkten bestimmen können.	Abbildung von Punkten im Koordinatensystem. Bestimmung der zweidimensionalen (quadratischen) Matrix und des Verschiebungsvektors $\vec{\mathbf{v}}$ der Abbildungsgleichung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.	Nach Zeit, und in guten Lerngruppen, können auch Drehungen um Winkelgrößen z.B. von 30°, 45°, 60°, -45° etc. betrachtet werden, wobei sich die Koordinatenänderung bei Drehung mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt. Dies bereitet Fragestellungen der Trigonometrie der Klasse 10 vor.

Klasse 10

(30 Stunden)

	Lernabschnitte	Richtzeiten	Seite
1	**Komplexe Zahlen**	20 Stunden	16
2	**Funktionsgrenzwerte und Folgenstetigkeit**	10 Stunden	18

Zeitliche Grundlage des Plans ist ein wöchentlicher Zusatzunterricht von 1 Unterrichtsstunde, d.h. es wurden planerisch 30 (Netto-) Jahresstunden in Ansatz gebracht, womit alle Ausfallzeiten durch Ferien, Klassenarbeiten, Betriebspraktika, Exkursionen, Klassenfahrten etc. berücksichtigt wurden.

Komplexe Zahlen:
20 Stunden

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Wissen und exemplarisch nachweisen können: $(\mathbb{N};+)$, $(\mathbb{N}^*;\cdot)$ sind Halbgruppen, $(\mathbb{Z};+)$ ist abelsche Gruppe, $(\mathbb{Z}^*;\cdot)$ ist Halbgruppe, $(\mathbb{Z};+;\cdot)$ ist Ring, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper.	Rückblick auf die bisher bekannten Zahlbereiche unter dem Gesichtspunkt der Lösbarkeit von Gleichungen. Zahlenaufbau: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ als angeordnete Körper.	Die unterschiedlichen Zeichen für Zahlen mit ihrer arithmetischen Eignung, sowie die Vergrößerung der Zahlenmengen durch Vereinigung mit neuen Zahlenmengen sollten mit angesprochen werden.
Die Addition und Subtraktion in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ verständig rechnerisch und geometrisch ausführen können. Wissen und begründen können, dass mit: $(a;b)\cdot(c;d):=(a\cdot c-b\cdot d\,;b\cdot c+a\cdot d)$ die komplexen Zahlen bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bilden. Die Distributivgesetze nachweisen können. Multiplikation und Division von komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten sicher ausführen können. Wissen und nachweisen können, dass $\mathbb{C}$ nicht anzuordnen ist. Den Zusammenhang zwischen den kartesischen und den polaren Koordinaten einer komplexen Zahl kennen und bei Umrechnungen verwenden können. Das Quadrat und die Quadratwurzel einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten bestimmen können und bei der Lösungsmengenbestimmung von quadratischen Gleichungen verwenden können.	Einführung komplexer Zahlen als Zahlenpaare (Gaußsche Zahlenebene) und ihrer Verknüpfungen: Addition, Subtraktion mit zugehöriger geometrischer Interpretation.. Multiplikation in $\mathbb{C}$. Einführung der Schreibweise: $(a;b)=a\cdot(1;0)+b\cdot(0;1)=a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}$. Eigenschaften der Konjugation; Betrag einer komplexen Zahl und Interpretation der Division als Multiplikation mit $\frac{1}{a+b\cdot i}=\frac{a-b\cdot i}{a^2+b^2}$. $\mathbb{C}$ als nicht angeordneter Oberkörper von $\mathbb{R}$. Geometrische Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$ als Drehstreckung. Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen und Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt. Quadratur und Quadratwurzel einer komplexen Zahl. Lösungsmengenbestimmung quadratischer Gleichungen mit reellen und komplexen Koeffizienten.	Als Einstieg könnte z.B. die Aufgabe von Cardano dienen: “Teile die Zahl 10 so in 2 Teile, dass das Produkt dieser Teile 40 ergibt”. Es empfiehlt sich, die Multiplikation von Zahlenpaaren aus den Gruppenaxiomen herzuleiten. Hier ist sicherlich eine Wiederholung der Eigenschaften der Tangensfunktion mit ihrer Periodizität notwendig. Hier ergibt sich eine erste Einsicht in die Tatsache, dass bei quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten Lösungen stets konjugiert auftreten.

Mit vollständiger Induktion nachweisen können, dass gilt: $(r\cdot\cos(\varphi)+i\cdot r\cdot\sin(\varphi))^n$ = $r^n\cdot(\cos(n\cdot\varphi)+i\cdot\sin(n\cdot\varphi))$ Nachweisen können, dass die n-ten Einheitswurzeln bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bilden.	Satz von Moivre mit zugehörigem Beweis. Potenzen und n-te Wurzeln von Komplexen Zahlen in Polarkoordinaten. Die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln (Kreisteilung) mit graphischer Interpretation.	
	Hauptsatz der Algebra und die Primpolynome über den reellen und komplexen Zahlen. Zerlegung von Polynomen mit reellen Koeffizienten in Primpolynome in einfachen Fällen.	An einen vollständigen Beweis ist hier nicht gedacht. Es genügt, den Sachverhalt an exemplarischen Beispielen zu verdeutlichen. Zur Nullstellenbestimmung bietet sich z. B. der Einsatz geeigneter Software an.
	Nach Zeit: Anwendungen von komplexen Zahlen, z.B. in der Physik, Cardanosche Formel, etc.	

<u>Funktionsgrenzwerte und Folgenstetigkeit:</u>

10 Stunden

<u>Hinweis zum Lernabschnitt:</u> Dieser Lernabschnitt dient der Vertiefung der Inhalte der Lernabschnitts: **Folgen und Grenzwerte in elementarer Form** und der Präzisierung des Begriffs der **Differenzierbarkeit**, so wie dies im Plan für den Normalzug beschrieben ist. Die hier beschriebenen Inhalte sind sinnvoll in ein Gesamtkonzept von Unterricht dieser Abschnitte des Normalplanes zu integrieren.

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
An geeigneten Beispielen entscheiden können, ob bei Konvergenz einer Zahlenfolge auf der x-Achse die induzierte Funktionswertfolge auf der y-Achse konvergiert oder divergiert. Eine Definition der (Folgen-)Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle kennen und graphisch mit Beispielen und Gegenbeispielen erläutern können.	Grenzwertuntersuchungen für Funktionswertfolgen an ausgewählten Beispielen; Übertragung von Folgen auf der x- Achse über die Funktionsvorschrift auf Folgen auf der y-Achse. Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle ihrer Definitionsmenge. Beispiele unstetiger Funktionen. Folgerungen aus der Stetigkeit einer Funktion: u.a. Nullstellensatz.	Hier bietet sich auch eine Untersuchung an Definitionslücken von Bruchtermen an. Das Beispielmaterial sollte hinreichend einfach gehalten werden und keine Abschätzung mit Ungleichungen erforderlich machen.
Den Beweis des Satzes: “Wenn eine Funktion an einer Stelle ihrer Definitionsmenge differenzierbar ist, dann ist die Funktion an dieser Stelle stetig” erläutern können. Beispiele von stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktionen angeben können. Die fehlende Differenzierbarkeit an geeigneten Stellen rechnerisch nachweisen können.	Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion. Beispiele stetiger, aber nicht differenzierbarer Funktionen.	Beispiele wie: f mit $f(x) = \mid x^2 - 4 \mid$; $x_0 = 2$.