Herder-Oberschule
Gymnasium
Seit 1903

Vorläufiger Plan[1)] für die Ergänzungsstunden

MATHEMATIK

in den Zügen mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil

1) Entwurf

Klasse 7

(30 Stunden)

	Lernabschnitte	Richtzeiten	Seite
1	**Zahlen:** Zeichen für Zahlen, Fehler, Stellenwertsysteme	12 Stunden	2
2	**Sprache und Logik**	12 Stunden	3
3	**Geometrie:** Begründen und Beweisen, vertiefende geometrische Sätze	6 Stunden	5

Vorbemerkung:

Unter dem Gesichtspunkt, dass in den zusätzlich zur Verfügung stehenden Stunden Inhalte der späteren Jahrgangsstufen nicht vorgezogen unterrichtet werden dürfen, sondern Raum geboten wird u.a. für:

1) inhaltliche und methodische Vertiefungen bei aktuell behandelten Themen,
2) Erweiterung der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in bezug auf Inhalte, für die bisher wenig Zeit blieb,
3) mehr problem- und projektorientierte Unterrichtsformen in Verbindung mit einem größeren Maß an Eigentätigkeit bzw. selbständiger Erarbeitung in Gruppen,
4) Verbindungen zu anderen Fächern; stärkere Betonung von mathematischen Problemstellungen in Anwendungssituationen,
5) historische Bezüge, die ein allgemeinbildendes Verständnis von Mathematik als (z.T. geisteswissenschaftliche) Kulturtechnik in der Entwicklung, z.T. repräsentiert in Personen, darstellen,
6) einen verständigen Umgang mit mathematischen 'Werkzeugen' (Taschenrechner, Computersoftware etc.) mit der Notwendigkeit, gelieferte Ergebnisse auf Tragfähigkeit analysieren und beurteilen zu können,

zielen die 3 Lernabschnitte auf folgende Aspekte der Vertiefung:

Thema 1 (Bezug zu Naturwissenschaften) soll die Urteilsfähigkeit bezüglich numerischer Ergebnisse verbessern. Dabei ist auch intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler relativ früh lernen, einen Taschenrechner verständig einzusetzen, und über Schätzgrößen soll ihr Gefühl für Größe und Güte von Werten geschult werden. Durch Bewusstmachung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Ziffern, Zahlen, Zeichen für Zahlen bei unterschiedlichen Stellenwertsystemen kann auch ein Beitrag für die informationstechnische Grundbildung und spätere Zahlbereichserweiterungen geleistet werden.

Thema 2 (Bezug zu Deutsch) soll die (Fach-)Sprachfähigkeit und das Bewusstsein für den Inhalt von sprachlichen Aussagen schulen. - Auch in diesem (aussagenlogischen) Bereich sind informationstechnische Elemente vorhanden, jedoch steht die Verbesserung der sprachlichen Formulierungsfähigkeit im Vordergrund, die in der Folge in der Geometrie weiter gefördert wird.

Thema 3 spricht auch eine emotional-ästhetische Komponente an und schult Problemlösefähigkeit und Präzision in der Argumentation. Einige der aufgeführten geometrischen Sätze werden zwar ohnehin am Gymnasium unterrichtet, allerdings nicht immer in dem hier angestrebten Aussagegehalt und Niveau bezüglich der Unterrichtsziele. Darüber hinaus wurde Wert darauf gelegt, dass die aufgeführten Sätze vorherige geometrische Beziehungen in komplexeren Zusammenhängen aufgreifen, um auf diese Weise auch die Hierarchie von Argumentationsketten sowie Ordnung und Beziehungen erfahrbar zu machen. Unter den Aspekten des Endes des Schuljahres, der Ästhetik und der Motivation für die Zukunft sind noch einige berühmte Sätze aufgeführt, die in dieser Klassenstufe nur propädeutisch-konstruktiv erschlossen werden können. Sie können eventuell in Klassenstufe 9 im Rahmen der Ähnlichkeitslehre wieder aufgegriffen werden.

Zahlen: Zeichen für Zahlen, Fehler, Stellenwertsysteme

12 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Unendlich periodische Dezimalbrüche in (gemeine) Brüche umwandeln können - und umgekehrt. Einblick in die rechentechnische Problematik der Dezimalschreibweise für unendlich periodische Dezimalzahlen besitzen.	Umwandlung unendlich periodischer Dezimalbrüche in (gemeine) Brüche - und umgekehrt.	Die Umwandlung von endlichen Dezimalzahlen in Brüche (und umgekehrt) ist aus der Einheit "Elementare Prozentrechnung" bekannt und in einigen Übungen zu wiederholen.
Taschenrechnerdarstellung unendlicher periodischer Dezimalbrüche als Näherungswert erkennen und Fehler abschätzen können.	Brüche mit dem Taschenrechner als Ergebnis einer Division darstellen; z.B.: $\frac{2}{3} = 0{,}666\underline{7}$, aber $\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0{,}3333+0{,}3333 = 0{,}666\underline{6}$; $\frac{1}{7} = 0{,}1\underline{428571}$ im Vergleich mit $\frac{3}{7} = 0{,}\underline{428571}4$, usw.	Zur Beurteilung der Taschenrechnerdarstellung eines unendlichen, periodischen Dezimalbruchs gehört auch die Frage, wie man in der Taschenrechnerdarstellung eine Periodizität erkennt oder vermutet. Die Bestätigung kann dann über eine Proberechnung durch geeignete Multiplikation erfolgen.
Rundungsregel kennen und anwenden können.	Rundungsregel, Stellenwertsystem, unterschiedliche Genauigkeit von Näherungswerten.	
Auswirkung der Güte von Eingangsgrößen auf das Ergebnis erkennen und abschätzen können.	Näherungswerte von Summen und Produkte von Näherungswerten; Betrachtung der nicht gesicherten Stellen im Verlauf der Rechnung.	Hierbei ist nur an die Formulierung entsprechender Faustregeln gedacht.
Schätzwerte für Ergebnisse verschiedener Rechenoperationen angeben können.	Überschlagsrechnungen; sinnvolles Runden von Größen.	Hier bieten sich Beispiele aus Physik und Chemie an.
Die wertmäßige Bedeutung von gleichen Ziffern an gleicher Stelle in unterschiedlichen Stellenwertsystemen angeben können.	Darstellung von natürlichen Zahlen im Dualsystem, Stufenzahlen (Vergleich der Systeme), Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen - und umgekehrt; ein weiteres Zahlsystem, z.B. Oktalsystem oder Se-(Hexa-)dezimalsystem.	Die Ausführung von Rechenoperationen in anderen Zahlsystemen, insbesondere die Multiplikation und Division z.B. von Dualzahlen, kann je nach Zeit als Ergänzung und Vertiefung in Betracht kommen.

Sprache und Logik

12 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Einblick in die Unschärfe der Umgangssprache, insbesondere in bezug auf die Verbindungswörter "und" und "oder" bekommen. Die Bedeutung von "nicht" in unterschiedlichen Sätzen klassifizieren können.	Verschiedene Bedeutungen des Wortes "und" in der Umgangssprache erkennen: "und" als "und"; "und" als "oder"; "und" als "exklusives oder"; "und" als Rechenoperator; "und" als Relation. Umgangssprachlich formulierte Sätze sollen in eindeutige Sätze umformuliert werden. Verschiedene Bedeutungen des Wortes "oder" erkennen: "oder" als "und"; "oder" als "oder"; "oder" als "exklusives oder"; "oder" als "wenn-dann". Beispiele von Sätzen mit "nicht" sollen auf ihren Aussagegehalt hin untersucht und positiv formuliert werden.	Einige Sätze zu den unterschiedlichen Bedeutungen der Worte "und" und "oder" sollten vorgehalten werden, die Schüler können hier aber viele Alltagserfahrungen beisteuern. Es soll hier nicht die Umkehrung einer Existenz- und Allaussage behandelt werden. Hier ist an eine Vorbereitung durch inhaltlich präzise Deutung der umgangssprachlichen Formulierung gedacht.
Durch Angabe eines eindeutigen Wahrheitswertes entscheiden können, ob ein sprachliches Gebilde eine Aussage ist oder nicht.	Aussagen sollen von anderen Satzgebilden eindeutig unterschieden werden, und ihre Bedeutung für die Fachsprache soll transparent gemacht werden.	Hier sollte auch auf einen kurzen historischen Exkurs zur Entwicklung der Logik bei Aristoteles (350 v. Chr.) nicht verzichtet werden.
Wissen, wie Aussagen mit den Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verknüpft werden und in Anwendungen ausführen können.	Die Schüler sollen mehrere Aussagen mit den Junktoren verknüpfen und den zusammengesetzten Aussagen Wahrheitswerte zuordnen können. Sie sollen dabei die Bedeutung der Wahrheitstafeln als übersichtliches Hilfsmittel kennen lernen und anwenden.	Auf die Vereinfachung von aussagenlogischen Verknüpfungen, etwa mit Hilfe der Regeln von dé Morgan, ist in dieser Klassenstufe nicht gedacht. Allerdings ist im Unterricht transparent zu machen, dass der semantische Bezug der einzelnen Aussagen für den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage keine Bedeutung hat.

<table>
<tr><th>Lernziele</th><th>Lerninhalte</th><th>Erläuterungen</th></tr>
<tr>
<td>An Beispielen der Umgangssprache angeben können, ob bei subjunktiv verknüpften Aussagen die Teilaussagen inhaltlich verknüpft sind oder nicht.</td>
<td>In umgangssprachlichen subjunktiven (wenn-dann) Aussagen gibt es unterschiedliche, rein auf die Verknüpfung, aber auch auf die inhaltliche Bedeutung der Einzelaussagen abzielende Formulierungen.</td>
<td>Den Schülern fällt es schwer, gerade bei der Subjunktion von der inhaltlichen Bedeutung der Aussagen zu abstrahieren. Die Unterscheidung von Sprache und Metasprache und somit von Subjunktion und Konjunktion ist für diese Klassenstufe zu abstrakt. Es gilt, den Schülern über das Beispielmaterial den Weg zur Deutung der Subjunktion mittels der Wahrheitstafeln zu öffnen.</td>
</tr>
<tr>
<td>Die Wahrheitstafel der Subjunktion kennen und an Beispielen anwenden können.</td>
<td>Anhand plausibler Aussagenverknüpfungen, die die Wahrheitsbelegungen nahelegen, sollte die Wahrheitstafel für die Subjunktion eingeführt werden.
<table>
<tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \rightarrow q$</th></tr>
<tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>w</td><td>f</td><td>f</td></tr>
<tr><td>f</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>f</td><td>f</td><td>w</td></tr>
</table>
</td>
<td>Als Beispiel kann ein Satz wie: "Wenn ich mich gut auf die Mathearbeit vorbereite, schreibe ich keine Fünf" dienen, denn nur wenn man sich gut vorbereitet und dennoch eine Fünf schreibt, wird der Satz auch als falsch empfunden.</td>
</tr>
<tr>
<td>Kennen der Äquivalenz der Subjunktionen:
$p \rightarrow q$ und $(\neg q \rightarrow \neg p)$</td>
<td>Anhand entsprechender Beispiele und mit Hilfe der Wahrheitstafeln wird der Unterschied zwischen Satz und Kehrsatz erarbeitet. Ebenso wird die Äquivalenz der in den Lernzielen angegebenen beiden Subjunktionen eingeführt und in Anwendungen vertieft.</td>
<td>Umgangssprachliche Beispiele wie:
- Wenn es geregnet hat, ist die Straße nass.
- Wenn die Straße nass ist, hat es geregnet.
- Wenn die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet.
verdeutlichen den Umgang mit Satz und Kehrsatz sowie Subjunktion und Negation.</td>
</tr>
</table>

Geometrie: Begründen und Beweisen, vertiefende geometrische Sätze

6 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Sätze über die Winkelsumme im n-Eck und über die Außenwinkel kennen, begründen und anwenden können.	Winkelsumme im n-Eck, Außenwinkel am n-Eck. Konstruktion regelmäßiger n-Ecke mit vorgegebener Seitenlänge.	Bei der Konstruktion (ohne das Hilfsmittel eines Außenkreises mit entsprechend eingeteiltem Zentriwinkel) ist ein hohes Maß an konstruktiver Präzision gefordert.
Wissen und begründen können, dass die Mittelparallele im Dreieck halb so lang wie die Grundseite ist.	Mittelparallele (Strecke) im Dreieck.	Der Satz ist eine Voraussetzung für den Satz über die Seitenhalbierenden und dient der Festigung der Kongruenzsätze und der Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen.
Wissen, dass alle 3 Seitenhalbierenden eines Dreiecks durch einen Punkt S verlaufen, dass S der "Schwerpunkt" des Dreiecks ist, und beweisen können, dass S jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt.	Satz über die Seitenhalbierenden eines Dreiecks.	Durch fortlaufende Neukonstruktion eines Mittendreiecks kann bei der Begründung, dass alle Seitenhalbierenden durch einen Punkt verlaufen, schon ein (naiver) infinitesimaler Grenzwertgedanke eingebracht werden.
Den Umfangs- (Peripherie-) winkelsatz am Kreis kennen und Beweisschritte am ausgewählten Beispiel begründen können. Die Umkehrung des Satzes formulieren können.	Umfangs- (Peripherie-) winkelsatz am Kreis und seine Umkehrung.	Der Satz des Thales soll als Spezialfall des Umfangswinkelsatzes erkannt werden.
Die Sätze über das Kreisviereck und den Sehnen-Tangentenwinkel am Kreis kennen und beweisen können. Die Umkehrung des Satzes über das Kreisviereck formulieren können.	Satz über das Kreis- (Sehnen-) viereck und seine Umkehrung. Satz über den Sehnen-Tangenten-Winkel.	Ein Endpunkt der Sehne ist Scheitelpunkt des Winkels, die Tangente in diesem Punkt und die Sehne bilden die Schenkel.
Den Satz über das Tangentenviereck kennen und beweisen können.	Satz über das Tangentenviereck.	

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
	nach Zeit: *Satz über die Ankreise eines Dreiseits.* *Satz über den Neunpunktekreis (Feuerbachkreis).*	Diese beiden Sätze dienen einem vertieften Verständnis von Winkelhalbierenden und Höhen. Es kann auch schon genügen, nur die Aufgabe zu stellen, einen Ankreis an ein Dreiseit zu konstruieren.
	Satz über die Eulersche Gerade, *Satz von Desargues,* *Satz von Pappus-Pascal.*	Hier kann man nur, evtl. im Sinne eines "krönenden Abschlusses", die Sätze propädeutisch-konstruktiv behandeln.

ANHANG

Zum Lernabschnitt 1:

Zur Umwandlung periodischer Dezimalbrüche in Brüche:
Es sei $a := 0,\overline{8}$. - Dann läßt sich a in erster Näherung darstellen als:
a = 0,8888│8 . (Ziffer hinter dem Strich ist die nicht gesicherte Stelle). - Also ergibt sich:

$$
\begin{array}{l}
10\cdot a = 8,8888|\mathit{8} \\
-1\cdot a = 0,8888|8\mathit{8} \\
\hline
9\cdot a = 8,0000|\mathit{0} \;-\; 0,0000\mathit{0}8
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} \cdot 0,0000\mathit{0}8$$

Wenn man eine weitere Ziffer der eigentlich periodischen Zahl dem Näherungswert a hinzufügt, so erhält man eine weitere Null im subtraktiven Anteil, dem Fehler.

Also nimmt man an, $a = \frac{8}{9}$ sei richtig (naiver Grenzwertbegriff); Bestätigung durch Division!

Wann entspricht ein Bruch einer endlichen Dezimalzahl? - Beispiel: $\frac{7}{40} = \frac{7}{2\cdot2\cdot2\cdot5} = \frac{7\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{175}{1000} = 0,175$

Wenn der Bruch so erweiterbar ist, dass der Nenner nur Faktoren der 10 enthält (Dezimalsystem), was immer dann möglich ist, wenn im Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5 enthalten sind.

Rundungsregel:
Alle Ziffern, die hinter der Stelle stehen, auf die gerundet wird, werden durch die Ziffer 0 ersetzt (bzw. weggelassen), wenn sie hinter dem Komma stehen. - Ist die erste Ziffer, die durch 0 ersetzt (bzw. weggelassen) wird, eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, oder 4, dann wird abgerundet, bei den Ziffern 5, 6, 7, 8, oder 9 wird aufgerundet.

Anwendung der Rundungsregeln auf eine Zahl, die nacheinander auf verschiedene Stellen gerundet wird.

$$798462 \rightarrow \begin{cases} 798460 & \text{(Zehner)} \\ 798\underline{5}00 & \text{(Hunderter)} \\ 798\underline{0}00 & \text{(Tausender)} \\ \underline{8}00000 & \text{(Zehntausender)} \\ 800000 & \text{(Hunderttausender)} \end{cases}$$

Unterscheidung von Zahldarstellungen wie: ~3,7 und ~3,70, sowie von Näherungswerten unterschiedlicher Genauigkeit. Sei z.B.: $a \approx 680000$. - Wenn a auf die Zehntausenderstelle gerundet wurde, so gilt: $685000 > a \geq 675000$; bei einem exakten Wert von 683472 beträgt der (absolute) Fehler: 3472. - Wenn a auf die Zehnerstelle gerundet wurde, so gilt: $680005 > a \geq 679995$; bei einem exakten Wert von 679998 beträgt der (absolute) Fehler: 2.

Faustregeln zum Addieren (a) und Multiplizieren (m) von Näherungswerten:

(a) 1) Eine Summe von Näherungswerten rundet man auf dieselbe Stelle, auf die der Summand mit dem größtmöglichen Fehler gerundet wird,

2) aus dem Näherungswert für die Summe läßt sich nicht unmittelbar ablesen, wie groß sie höchstens ist. [2)]

$$
\begin{array}{r}
3,76 \\
+\ 12,6 \\
+\ 1,2583 \\
+\ 0,06 \\
\hline
17,6783
\end{array}
\approx 17,7
$$

[2)] Der genaue Wert muß nicht zwischen 17,65 und 17,75 liegen. Wäre 12,6 Näherungswert zu 12,55, alle anderen Summanden aber genaue Werte, dann wäre die Summe 17,6283 (< 17,65) !

(m) 1) Das Produkt von zwei Näherungswerten rundet man auf so viele geltende Ziffern, wie der Faktor mit der kleinsten Zahl geltende Ziffern hat;

$2{,}1\mathit{9} \cdot 3{,}4\mathit{2} = 7{,}\mathit{4898}$
$4{,}9\mathit{5} \cdot 8{,}9\mathit{7} = 44{,}\mathit{4015}$
$2{,}1\mathit{7} \cdot 4{,}2\mathit{9} = 9{,}\mathit{3093}$
$7{,}9\mathit{5} \cdot 6{,}4\mathit{1} = 50{,}\mathit{9595}$

Sind die Faktoren auf drei geltende Ziffern angegeben, dann hat es keinen Sinn, das Produkt auf mehr als drei geltende Ziffern zu runden.

Also: ~7,49; ~44,4; ~9,31; ~51,0 !

2) die genauere Angabe <u>eines</u> Faktors verbessert nicht die Genauigkeit des Produkts:

$2{,}174\mathit{9} \cdot 4{,}2\mathit{9} = 9{,}\mathit{330321}$
$2{,}1\mathit{7} \cdot 4{,}294\mathit{9} = 9{,}3\mathit{19933}$

$7{,}954\mathit{9} \cdot 6{,}4\mathit{1} = 50{,}\mathit{990909}$
$7{,}9\mathit{5} \cdot 6{,}414\mathit{9} = 50{,}9\mathit{98455}$

Als Namen für Stellen kann der Begriff der 'Stufenzahl' verwendet werden. Analog zum Dezimalsystem (1*er*, 10*er*, 100*er*, 1000*er* etc.) kann z.B. eingeführt werden: 1*er*, 8*er*, 64*er*, 512*er* etc. . Damit stellt sich der euklidische Divisionsalgorithmus bei der Umwandlung einer Dezimalzahl (491) in eine Oktalzahl wie folgt dar:

```
491 : 8 = 62 (   8er) + 5 ( 1er)
 62 : 8 =  7 ( 64er) + 6 ( 8er)
  7 : 8 =  0 (512er) + 7 (64er).
```

Damit gilt: $491_{10} = 765_8$.

Eine <u>drei</u>stellige Dualzahl entspricht einer Oktalziffer ($000_2 = 0_8$ ... $111_2 = 7_8$) , eine <u>vier</u>stellige Dualzahl (ein halbes Byte) entspricht einer Hexadezimalzahl ($0000_2 = 0_{16}$ ... $1111_2 = F_{16} = 15_{10}$).

Division im Dualsystem (Periodizität): $0{,}1_{10} = 0{,}0\overline{0011}_2$. Dazu wird der bekannte Divisionsalgorithmus durchgeführt in der Darstellung: $0{,}1_{10} = 1_{10} : 10_{10} = 1_2 : 1010_2$! - Entsprechend gilt z.B.: $0{,}1_7 = 0{,}\overline{142857}_{10}$

<u>Zum Lernabschnitt 2:</u>

<u>I. *Inhaltliche Konzeption*:</u>

1. Behandlung der Unschärfe der Umgangssprache insbesondere bei der Verwendung der Wörter **und, oder** u. **nicht.** Interpretation der Beispielsätze, Präzisierung der Formulierung, Präzisierung der Junktoren "und" und "oder".

2. Die Logik als Mittel der Präzisierung der Sprache (auch Fachsprache) und der Verknüpfung von Aussagen.
   - Aussagen und Wahrheitswerte
   - Verbindung von Aussagen mit und u. oder zu neuen Aussagen
   - Negation von Aussagen

3. Die Wahrheitstafeln als Hilfsmittel zur Ermittlung von Wahrheitswerten.

4. Die Subjunktion in der Umgangssprache.
   Analyse der Aussagen und Gehalt der inhaltlichen Zusammenhänge.

5. Formalisierung der Subjunktion; Übungen.
   Erarbeitung der Wahrheitstafel und Anwendung.

II. *Gedanken zur inhaltlichen Umsetzung*:

1.1 Beispiele zu "und"
- Paul und Paula haben eine 2 in Mathematik.
- Alle mit einer 4 und einer 5 in der Arbeit bleiben nach dem Unterricht bitte noch da.
- Johanna und Karla treffen sich.
- 5 und 7 sind Primzahlen.
- 8 und 13 sind 21.
- Er geht auf der rechten und auf der linken Seite der Straße.
- Alle, die den Klassenkassenbeitrag noch nicht bezahlt haben und die ihr Impfbuch noch nicht abgegeben haben, bleiben nachher noch hier.

Zu klären ist, welche Bedeutung die Sätze präzise haben, wie sie evtl. eindeutiger formuliert werden können und wie "und" spezifisch verwendet wird:
("und" als "und", "und" als "exklusives oder", "und" als Relation, "und" als Rechenoperator, "und" als "oder")

1.2 Beispiele zu "oder"
- Ich esse gerne Käse oder Marmelade zum Frühstück.
- Heute abend gehe ich ins Kino oder bleibe zu Hause.
- Entweder Du gibst mir jetzt mein Geld wieder, oder ich gehe zu Deinem Vater.
- Studiert sie nun Physik oder Mathematik ?
- Gib mir alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100 an, die durch 3 oder 5 teilbar sind.

Entsprechend 1.1 wird auch bei den "oder"-Sätzen eine sprachliche Analyse und Präzisierung vorgenommen.

1.3 Beispiele zu "nicht"
- Es stimmt nicht, dass er eine 1 geschrieben hat.
- Morgen müssen die katholischen Schüler nicht zur Schule kommen.
- Er sagt nicht immer die Wahrheit.
- Es stimmt nicht, dass 21 durch 3 und 4 teilbar ist.

Hier wäre transparent zu machen, welche Aussage durch das "nicht" intendiert ist.

2. Begründung der Bedeutung einer präzisen Sprache, insbesondere einer präzisen Fachsprache und kurze historische Einbettung der Logik (Aristoteles ca 350 v. Chr.).

2.1 Definition der Aussage als Grundkonstrukt der Aussagenlogik
(Beispiele und Gegenbeispiele)

3.1 Verknüpfung von Aussagen und Wahrheitstafeln
Festlegung der Junktoren durch Wahrheitstafeln
Beispiele:
- A : 21 ist durch 3 teilbar;
- B : 21 ist durch 7 teilbar;
- C : 21 ist durch 4 teilbar;
- A und B
- A oder B
- A oder C usw.

Übungen

3.2 Negation von Aussagen
Erarbeitung über Aussagen u. Wahrheitstafel
Notwendigkeit der Trennung von formaler und inhaltlicher Behandlung
Nutzen des formalen Umgangs für die inhaltliche Behandlung

4. Subjunktion

   In der Umgangssprache taucht die Subjunktion sehr unterschiedlich auf.

   Beispiele:

   - Wenn Du eine 1 schreibst, fresse ich einen Besen.
   - Wenn Du mal dein Arbeitsmaterial vollständig dabei hast, fallen Weihnachten und Ostern auf einen Tag.
   - Wenn es im Sommer schneit, zahl ich dir dein Geld zurück.

   Bei den ersten beiden Subjunktionen ist kein inhaltlicher Zusammenhang der Aussagen erkennbar, durch die zweite falsche Aussagen soll aber die Ungültigkeit der ersten unterstrichen werden, bei der dritten Subjunktion soll hingegen durch die falsche erste Aussage die Beliebigkeit der zweiten unterstellt werden.

   Oft sind aber inhaltliche Besetzungen in wenn-dann Aussagen in der Umgangssprache anzutreffen. Sie beziehen sich auf kausale, temporale oder konditionale Zusammenhänge. Hierzu folgende Beispiele:

   - Wenn es regnet, wird die Straße nass.
   - Wenn es dunkel wird, gehe ich nach Hause.
   - Wenn ich im Lotto gewinne, kaufe ich mir einen Porsche.

5. Die Wahrheitstafel der Subjunktion kann an Beispielen wie:

   - Wenn Du viel für die Bundesjugendspiele trainierst, wirst Du ganz sicher eine Urkunde bekommen.

   erarbeitet werden. Für Übungen findet man reichhaltiges Material (z.B. in K.Schick, Aussagenlogik).

Zum Lernabschnitt 3:

01) [*Satz über die Summe der Innen- und Außenwinkelmaße im n-Eck*]: Die Summe der Innenwinkelmaße eines n-Ecks ($n>2$; $n \in \mathbb{N}$) beträgt $(n-2)\cdot 180°$, die Summe der Außenwinkelmaße beträgt (konstant) $360°$! (→ Konstruktion regelmäßiger n-Ecke mit vorgegebener Seitenlänge!)

02) [*Satz über die Mittelparallele im Dreieck*]: Konstruiert man in einem beliebigen Dreieck eine Gerade g als Parallele zu einer Seite (z.B.: AB) durch den Mittelpunkt einer anderen Seite (z.B.: M_{AC}), so schneidet g die 3. Seite im Mittelpunkt (M_{BC}), und die Verbindungsstrecke der beiden Mittelpunkte ($M_{AC}M_{BC}$) ist halb so lang wie die parallele Seite (AB).

03) [*Satz über die Seitenhalbierenden im Dreieck*]: Der Schnittpunkt S zweier Seitenhalbierender eines beliebigen Dreiecks teilt beide Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1, und die dritte Seitenhalbierende verläuft auch durch S.

04) [*Satz über die Eulersche Gerade*]: In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten und der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden auf einer Geraden. (Es gilt außerdem: $\overline{HS} = 2\cdot\overline{MS}$)[3)]

05) [*Umfangs- (Peripherie-) winkelsatz am Kreis*]: Umfangswinkel über dem gleichen Kreisbogen (der gleichen Sehne; auf derselben Seite der Sehne) sind gleich groß. Sie sind halb so groß wie der zugehörige Mittelpunkts- (Zentri-) winkel (der zum Restbogen gehört). ⇒ Der Peripheriewinkel über einem Halbkreis ist ein rechter Winkel. [*Umkehrung*]: Die Scheitelpunkte aller gleichgroßer Winkel über einer Sehne (auf derselben Seite der Sehne) liegen auf einem Kreisbogen.

06) [*Satz über das Kreis- (Sehnen-) viereck*]: In einem Kreisviereck ergeben die Winkelmaße zweier gegenüber-liegender Winkel stets $180°$. [*Umkehrung*]: Ergeben bei einem Viereck die Winkelmaße zweier gegenüberliegender Winkel stets $180°$, so liegen die 4 Punkte auf einem Kreis.

[3)] Anmerkung: Die Sätze 2-4 laufen alle auf eine Untersuchung des Mittendreiecks hinaus. Satz 4 kann nur propädeutisch erschlossen werden, da zentrische Streckungen (Zentrum S; k=0,5) noch nicht zur Verfügung stehen.

07) [*Satz über den Sehnen-Tangenten-Winkel*[4)]]: Bei einem Kreis ist der (spitze) Sehnen-Tangenten-Winkel stets halb so groß wie der zur Sehne gehörende Mittelpunktswinkel.

08) [*Satz über das Tangentenviereck*]: Bei einem Tangentenviereck eines Kreises ist die Summe der Längen zweier gegenüberliegender Seiten stets gleich.

09) [*Satz über die Ankreise eines Dreiseits*]: Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels eines Dreiseits (z.B.: w_α) verläuft durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der beiden anderen Außenwinkel (z.B.: $\{O_A\} := w_{\beta'} \cap w_{\gamma'}$). Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiseits. Die Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ liegen auf den Höhen des Dreiecks, das aus den Mittelpunkten der Ankreise gebildet wird.

10) [*Satz über den Neunpunktekreis (Feuerbachkreis)*]: Der Kreis, der die Seiten eines Dreiecks halbiert, verläuft auch durch die Höhenfußpunkte und durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte.[5)]

11) [*Satz von Desargues*]: Bei zwei perspektiv gelegenen Dreiecken, d.s.h. die 3 Geraden durch entsprechende Eckpunkte der zwei Dreiecke verlaufen durch <u>einen</u> Punkt Z, liegen die drei Schnittpunkte der Geraden auf entsprechenden Dreiecksseiten alle auf einer Geraden.

12) [*Satz von Pappus-Pascal*]: a) Liegen die 6 Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender[6)] Seiten auf einer Geraden.
b) Bei einem Sehnensechseck eines Kreises liegen die 3 Schnittpunkte der Geraden auf gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.[7)]

[4)] Die Tangente wird selbstverständlich in einem Endpunkt der Sehne gezeichnet; dieser Endpunkt ist damit Scheitelpunkt des Winkels.

[5)] <u>Anmerkung:</u> Satz 9 und 10 stehen im engen Zusammenhang! - Man interpretiert das Dreieck von Satz 10 als das Dreieck, gebildet aus den Mittelpunkten der drei Ankreise eines Dreiseits, wobei das Dreiseit nun durch das Dreieck aus den Höhenfußpunkten beschrieben wird! Die Höhen im großen Dreieck sind nun Winkelhalbierende im Dreieck der Höhenfußpunkte, und die alten Dreiecksseiten halbieren hier die jeweiligen Außenwinkel des Höhenfußpunktedreiecks!

[6)] Bei einem Sechseck heißen Seiten gegenüberliegend (Gegenseiten), wenn sie durch 2 andere Seiten getrennt sind.

[7)] Die Sätze 11 und 12 sind rein propädeutisch gemeint (eventuell in Klasse 9 im Rahmen der Ähnlichkeitslehre zu beweisen).

Klasse 8

(30 Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Kombinatorik:** Zählprinzipien	10 Stunden	13
2	**Geometrie:** Verknüpfungen von Achsenspiegelungen, Symmetrien	15 Stunden	14
3	**Algebra:** Bruchungleichungen	5 Stunden	16

Vorbemerkung:

Unter dem Gesichtspunkt, dass in den zusätzlich zur Verfügung stehenden Stunden Inhalte der späteren Jahrgangs-stufen nicht vorgezogen unterrichtet werden dürfen, sondern Raum geboten wird u.a. für:

1) inhaltliche und methodische Vertiefungen bei aktuell behandelten Themen,
2) Erweiterung der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in bezug auf Inhalte, für die bisher wenig Zeit blieb,
3) mehr problem- und projektorientierte Unterrichtsformen in Verbindung mit einem größeren Maß an Eigentätigkeit bzw. selbständiger Erarbeitung in Gruppen,
4) Verbindungen zu anderen Fächern; stärkere Betonung von mathematischen Problemstellungen in Anwendungssituationen,
5) historische Bezüge, die ein allgemeinbildendes Verständnis von Mathematik als (z.T. geisteswissenschaftliche) Kulturtechnik in der Entwicklung, z.T. repräsentiert in Personen, darstellen,
6) einen verständigen Umgang mit mathematischen 'Werkzeugen' (Taschenrechner, Computersoftware etc.) mit der Notwendigkeit, gelieferte Ergebnisse auf Tragfähigkeit analysieren und beurteilen zu können,

zielen die 3 Lernabschnitte auf folgende Aspekte der Vertiefung:

Thema 1: Kombinatorische Zählprinzipien besitzen einen hohen Grad an Nützlichkeit im Alltag. Über geeignete Modellbildungen wird die Fähigkeit, wesentliche Strukturelemente von Sachverhalten zu erkennen, sowie Kreativität gefördert. Neben der Fundierung stochastischer Elemente wird das Verständnis für den binomischen Lehrsatz vertieft und der mathematische Hintergrund des 'Kulturerbes': Pascalsches Dreiecks erarbeitet. Auch bei der Herleitung der Summenformeln ist an eine Betonung sowohl historischer als auch kombinatorischer Aspekte gedacht. Darüber hinaus sind diese Formeln wesentliches Hilfsmittel für spätere Inhalte, die sich auf approximative Verfahren beziehen.

Thema 2 (Bezug zu Kunst) spricht u.a. eine emotional-ästhetische Komponente an und gestattet über die Analyse von Graphiken die Schulung 'geometrischen Sehens'. Über die Anfertigung eigener (einfacher) Parkettierungen soll auch das selbst definierte Maß an die Präzision eigener geometrischer Konstruktionen erhöht werden. Über strukturelle Einsichten bei der Hintereinanderausführung von Achsenspiegelungen werden bisher nur aus den Zahlbereichen bekannte Gesetzmäßigkeiten in einem neuen Kontext erfahren.

Thema 3 vertieft die algebraischen Fähigkeiten aus dem Bereich der Bruchgleichungen und führt sie in einen Zusammenhang mit Fragen der Ordnungsrelation, mit Mengenbeziehungen sowie einigen der schon in Klasse 7 behandelten aussagenlogischen Aspekte. Durch die Notwendigkeit von Fallunterscheidungen mit der nachfolgenden Zusammenführung von Lösungsmengen aus der Grundlage von Gültigkeitsbereichen (Definitionsmengen) wird eine große Sicherheit (automatisierte Fertigkeit) bei algorithmischen Lösungsstrategien sowie eine Schulung der Beurteilungsfähigkeit von Ergebnissen intendiert.

Kombinatorik: Zählprinzipien

10 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Die Summenformeln: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ kennen und ihre Herleitung erläutern können.	Formeln für die Summe der ersten - n natürlichen Zahlen - n Quadratzahlen - n Kubikzahlen. Summenschreibweise geeigneter Summen mit gleichstrukturierten Summanden.	Die Gaußsche Summe kann nach dem historischen Weg, aber auch durch geeignete graphische Abzählstrategien erarbeitet werden. Für die weiteren Summen bietet sich jedoch ein Weg über graphische Hilfsmittel an (siehe Anhang). Beweise im mathematisch strengen Sinne sind nicht erforderlich.
Die Bedeutung des Fakultätssymbols kennen und n! (prinzipiell) berechnen können. Wissen, dass es n! Permutationen aus n (verschiedenen) Elementen gibt. Eine geeignete Strategie (Modell) zur Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten bei einer geordneten Auswahl kennen und anwenden können.	Abzählprinzipien in einfachen Fällen: Permutationen. Auswahl von **k aus n** Elementen, unter Berücksichtigung der Reihenfolge, mit der Anzahl der Möglichkeiten: $\frac{n!}{(n-k)!}$.	z.B.: Sitzverteilung, Turmproblem (Schach) etc. z.B.: Sitzverteilung mit Freiplätzen, Autonummern etc. Zur Verdeutlichung kann auch ein Baumdiagramm hilfreich sein.
Den Wert von Binomialkoeffizienten in einfachen Fällen bestimmen können. Einige Problemstellungen, bei denen Binomialkoeffizienten auftreten, angeben können. Den mathematischen Hintergrund des **Pascalschen Dreiecks** kennen und erläutern können.	Auswahl von **k aus n** Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit der Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Pascalsches Dreieck.	Zur Herleitung kann u.a. auf ein rekursives Verfahren zurückgegriffen werden (siehe Anhang). Als Anwendungen kommen Lotto, der binomische Lehrsatz u.ä. in Frage.

Geometrie: Verknüpfung von Achsenspiegelungen, Symmetrien
15 Stunden

Lernziele	**Lerninhalte**	**Erläuterungen**
Wissen und begründen können, dass die Verknüpfung zweier Achsenspiegelungen eine Kongruenzabbildung der Ebene auf sich ist.	Verknüpfte Achsenspiegelungen als Kongruenzabbildung der Ebene auf sich mit den Eigenschaften: Maßtreue in bezug auf Strecken, Winkel und Flächen. Schreibweise: $S_h \circ S_g(P) = S_h(S_g(P))$; Sonderfall: $S_g \circ S_g = \text{id}$.	Gegenüber dem Rahmenplan für den Normalzug soll die Punktspiegelung **nicht** als eigenständige Abbildung eingeführt werden. Bei der Anknüpfung an die Kenntnisse über Geradenspiegelungen des Geometrieunterrichts der Klasse 7 werden implizit auch Wiederholungen und Präzisierungen notwendig sein.
Begründen können, dass die Verknüpfung zweier Achsenspiegelungen S_g und S_h - im allgemeinen nicht durch eine dritte Achsenspiegelung zu ersetzen ist,	Konstruktion von Bildern geeigneter geometrischer Objekte bei Verknüpfung von Achsenspiegelungen mit den Ergebnissen: Bei Verknüpfung <u>zweier</u> Achsenspiegelungen ändert sich der Umlaufsinn von Vielecken nicht,	
- für $g \parallel h$ und $g \neq h$ einer Verschiebung (Translation) entspricht,	gilt $(g \parallel h) \wedge (g \neq h)$, so ist der Abstand von g und h halb so groß wie die Länge des Verschiebungspfeiles: $d(g;h) = \frac{1}{2} \cdot \overline{PP'}$,	An eine Erarbeitung und Betonung vektorieller Gesichtspunkte ist hier nicht gedacht.
- für $g \nparallel h$ einer Drehung um den Schnittpunkt von g und h entspricht.	für $(\measuredangle(g;h) = \varepsilon) \wedge (0° < \overline{\varepsilon} \leq 90°)$ $\wedge (g \cap h = \{Z\})$ entspricht $S_h \circ S_g$ einer Drehung $D_{Z,\delta}$ mit $\overline{\delta} = \pm 2 \cdot \overline{\varepsilon}$.	
Wissen und beweisen können, dass bei sich schneidenden Spiegelachsen der Drehwinkel δ doppelt so groß wie der Winkel ε zwischen den Spiegelachsen ist.	Die Punktspiegelung S_Z als Sonderfall einer Drehung $D_{Z,\delta}$ mit $\overline{\delta} = \pm 180°$; $\overline{\varepsilon} = 90°$ ($g \perp h$).	Die entsprechenden Lerninhalte des Rahmenplans für den Normalzug sind ergänzend zu behandeln.
Die Punktspiegelung und ihre wesentlichen Eigenschaften kennen.	*Die Punktspiegelung als Abbildung der Ebene auf sich.*	Lernziele und Lerninhalte entsprechen dem Rahmenplan des Normalzuges.
Einfache geometrische Figuren durch Punktspiegelung abbilden können.		
Punktsymmetrie von Figuren erkennen und begründen können.	*Punktsymmetrie*	

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen, dass die Hintereinanderausführung von Achsenspiegelungen sowohl assoziativ als auch kommutativ sein kann: - Wissen, dass das Assoziativgesetz immer gültig ist, - im gegebenen Fall entscheiden können, ob das Kommutativgesetz gilt.	Untersuchung auf Kommutativität und Assoziativität bei der Hintereinanderausführung von Achsenspiegelungen an ausgewählten Beispielen. Als Ergebnisse geeigneter Konstruktionen kommen in Frage: **Das Assoziativgesetz**: $S_i \circ (S_h \circ S_g) = (S_i \circ S_h) \circ S_g$, ist immer gültig. **Das Kommutativgesetz** gilt im allgemeinen nicht, d.h. es gilt: - für $(g \parallel h) \wedge (g \neq h)$ gilt i.a.: $S_h \circ S_g \neq S_g \circ S_h$, - ebenso für $(g \cap h =: \{Z\}) \wedge$ $(\measuredangle(g;h) = \varepsilon) \wedge (0° < \overline{\varepsilon} \leq 90°)$ gilt i.a.: $S_h \circ S_g \neq S_g \circ S_h$, - für Verschiebungen (Translationen) bzw. Drehungen mit festem Drehzentrum gilt: $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ bzw. $D_{Z,\alpha} \circ D_{Z,\beta} = D_{Z,\beta} \circ D_{Z,\alpha}$, - für $g \perp h$ gilt: $S_h \circ S_g = S_g \circ S_h$.	Hier sollte eine sinnvolle, exemplarische Auswahl angestrebt werden. An eine vollständige Behandlung der Thematik ist nicht gedacht.
Definitionen der symmetrischen Vierecksformen und verschiedene Charakterisierungen kennen. Bei vorgegebenen drehsymmetrischen Figuren das Drehzentrum und den Drehwinkel angeben können. Einfache drehsymmetrische Figuren konstruieren können. Parkettierungen hinsichtlich aller darin enthaltenen Symmetrien analysieren können.	*Punkt- und achsensymmetrische Vierecke und ihre Eigenschaften.* Untersuchung einfacher Figuren auf Drehsymmetrien. Konstruktion einfacher, drehsymmetrischer, geometrischer Objekte (z.B.: Quadrat, gleichseitiges Dreieck). Konstruktion einfacher Parkettierungen. Untersuchung vorgegebener Ornamente hinsichtlich Verknüpfungen von Spiegelungen bzw. Drehungen.	Lernziele und Lerninhalte entsprechen dem Rahmenplan des Normalzuges. Hierbei, und im folgenden, sollen nicht nur verschiedene Figuren betrachtet werden, sondern insbesondere auch unterschiedliche Winkel (-größen). Hierfür können z.B. Ornamente von *Escher* zur Betrachtung herangezogen werden. Selbst angefertigte Parkettierungen sollen von Klassenkameraden/innen analysiert werden.

Algebra: Bruchungleichungen

5 Stunden

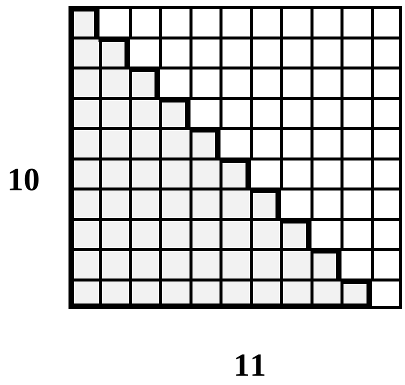
Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Die maximale Definitionsmenge einer Bruchungleichung bestimmen können. Den Hauptnennerterm einer Bruchungleichung in faktorisierter Form angeben und die Definitionsmenge unter dem Aspekt eines unterschiedlichen Vorzeichens des Nenners in 2 Teildefinitionsmengen aufteilen können. Die Auswirkungen der Äquivalenzumformung einer Bruchungleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnennerterm kennen und begründen können: - Eine Bruchungleichung geht i.a. über in ein durch ‘oder’ verknüpftes (Zähler-)Ungleichungssystem. - Die maximale Definitionsmenge teilt sich auf in (disjunkte) Teildefinitionsmengen der einzelnen Ungleichungen des Systems. - Die Lösungsmenge ist die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen der Einzelungleichungen (bzgl. der Teildefinitionsmengen) des Systems.	Bruchungleichungen mit den folgenden Arbeitsschritten bzw. Gesichtspunkten: - Maximale Definitionsmenge, - Faktorisierung der Nennerterme der einzelnen Bruchterme der Ungleichung, - Erweiterung der Bruchterme auf den Hauptnennerterm, - Aufteilung der Definitionsmenge in 2 Teildefinitionsmengen gemäß einer Vorzeichenuntersuchung des Hauptnenners und Übergang zu 2, durch ‘$\vee$’ verbundene, Zählerungleichungen, - Bestimmung der Lösungsmengen der einzelnen (linearen) Ungleichungen des Systems bezüglich der jeweiligen Definitionsmengen, - Angabe der Lösungsmenge der Ausgangsgleichung als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.	Teilweiser Transfer von Fertigkeiten aus dem Bereich von Bruchgleichungen. Hier sollten die in Klasse 7 behandelten Monotoniegesetze (Ordnungsrelation) wiederholt werden. Eventuell kann es sinnvoll sein, zur Vorbereitung von Inhalten, z.B. aus dem Bereich der Linearen Optimierung (in 2 Variablen), oder zur Festigung von Fähigkeiten aus dem Bereich Linearer Gleichungen exemplarisch eine graphische Interpretation des ‘Systems’ zu behandeln. Zu beachten ist dann jedoch, dass hier statt ‘$\wedge$’ ein ‘$\vee$’ auftaucht.
Lösungsmengen von Bruchungleichungen in einfachen Fällen sicher bestimmen können.	Bruchungleichungen bis zum Schwierigkeitsgrad von: a) $\frac{5x-6}{25x^2-4} + \frac{9-\frac{5}{2}x}{15x^2-6x} < \frac{4x-5}{20x^2+8x} - \frac{1}{6x}$ b) $-2 < \frac{5}{2x+1} \leq 1$	Die Behandlung von Bruchungleichungen mit Formvariablen ist nicht vorgesehen.

ANHANG

Zum Lernabschnitt 1:

Graphische Herleitung der Gaußschen Summenformel:

(Dargestelltes Beispiel: n=10)



Die Anzahl der grauen Kästchen ergibt offensichtlich, zeilenweise gelesen:

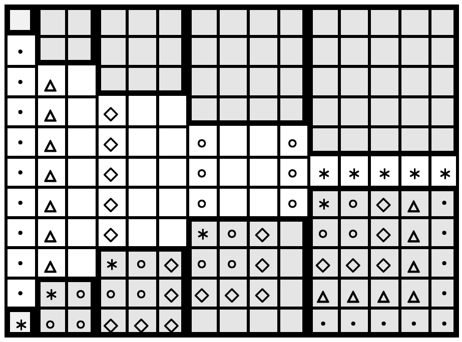
$$\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+...+10 \ !$$

Nimmt man noch einmal die gleiche Anzahl von (weißen) Kästchen dazu, so entsteht ein Rechteck mit den Kantenlängen **10** und **11**, d.h. der Gesamtkästchenanzahl: **10 · 11** .

Damit gilt: $$\sum_{i=1}^{10} \mathbf{i} = 1+2+3+...+10 = \frac{\mathbf{10 \cdot 11}}{\mathbf{2}} \ .$$

Graphische Herleitung der Summe der Quadratzahlen:

(Dargestelltes Beispiel: n=5)



Durch geschicktes Abzählen erkennt man, dass die Anzahl der weißen Kästchen (zwischen den Quadraten) genauso groß ist wie die Anzahl der Kästchen in den 5 unteren Quadraten.

Damit ist die Gesamtanzahl der Kästchen in dem dargestellten Rechteck:

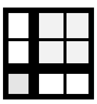
$$3 \cdot \sum_{i=1}^{5} i^2 = 3 \cdot (1^2 + ... + 5^2) \ .$$

Das Rechteck hat die Länge: $\frac{\mathbf{5 \cdot 6}}{\mathbf{2}}$, und die Breite: **2 · 5 + 1**.

Damit gilt im allgemeinen Fall für $n \in \mathbb{N}$: $$\mathbf{3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot (2n+1)} .$$

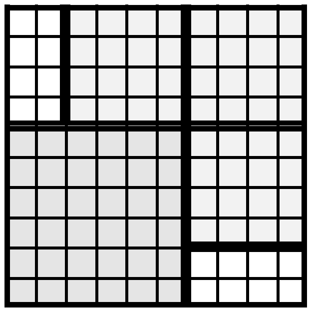
Graphische Herleitung der Summe der Kuben:

$1^3 + 2^3$: Der zweite Kubus besteht aus zwei Lagen von jeweils 4 Einheitskuben. Die zweite Lage (weiße Kästchen) wird in 2 Quader von jeweils 2 Einheitskuben geteilt und wie nebenstehend abgebildet angelegt. Es entsteht <u>eine</u> (quadratische) Lage von Einheitskuben!
Seitenlänge: 1 + 2 !



... + 3^3: Der Kubus besteht aus 3 Lagen von jeweils 9 Einheitskuben. Durch Anlegen der 3 Lagen an die bisherige Lage entsteht eine quadratische Lage von Einheitskuben der Seitenlänge: 1 + 2 + 3 !

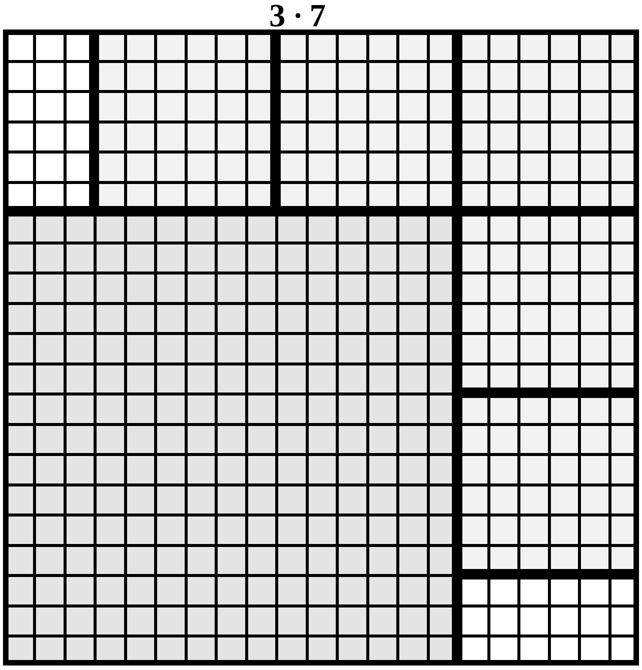
2 · 5



... + 4^3: Der Kubus besteht aus 4 Lagen von jeweils 16 Einheitskuben. Durch Anlegen von 3 quadratischen Lagen und zwei Teilen der 4. Lage, bestehend aus jeweils 8 Einheitskuben (weiße Kästchen), entsteht eine quadratische Lage von Einheitskuben der Seitenlänge: 1 + 2 + 3 + 4 !

... + 5^3: Der Kubus besteht aus 5 Lagen von jeweils 25 Einheitskuben. Durch Anlegen der 5 Lagen an die bisherige Lage entsteht eine quadratische Lage von Einheitskuben der Seitenlänge:
1 + 2 + 3 + 4 + 5 !

3 · 7



... + 6^3: 6 Lagen werden, wie nebenstehend skizziert, angelegt!

Die Länge der Seitenkante des Quadrates aus Einheitskuben beträgt nun: $\sum_{i=1}^{6} \mathbf{i}$!

Unter Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} .$$

<u>Herleitung der Summenformeln über den Binomischen Lehrsatz:</u>

Summenformel für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n (Gaußsche Summenformel):

Sei: $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i$

Es gilt:

$(0+1)^2 = 0^2 + 2\cdot0\cdot1 + 1^2$
$(1+1)^2 = 1^2 + 2\cdot1\cdot1 + 1^2$
$(2+1)^2 = 2^2 + 2\cdot2\cdot1 + 1^2$
$(3+1)^2 = 3^2 + 2\cdot3\cdot1 + 1^2$
....
$(n+1)^2 = n^2 + 2\cdot n\cdot1 + 1^2$

$1^2+2^2+3^2+ \dots +$ $(n+1)^2 = 1^2+2^2+3^2+ \dots +n^2 + 2\cdot S_1(n) + (n+1)$

$(n+1)^2 = 2\cdot S_1(n) + (n+1)$

$2\cdot S_1(n) = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)\cdot(n+1 - 1)$

$$\Rightarrow \quad S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Summenformel für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis n:

Sei: $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$

Es gilt:

$(0+1)^3 = 0^3 + 3\cdot0^2\cdot1 + 3\cdot0\cdot1^2 + 1^3$
$(1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot1^2\cdot1 + 3\cdot1\cdot1^2 + 1^3$
$(2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot2^2\cdot1 + 3\cdot2\cdot1^2 + 1^3$
$(3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot3^2\cdot1 + 3\cdot3\cdot1^2 + 1^3$
....
$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2\cdot1 + 3\cdot n\cdot1^2 + 1^3$

$1^3+2^3+3^3+ \ldots +$

$(n+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+ \ldots +n^3 + 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) + (n+1)$
$(n+1)^3 = 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) + (n+1)$
$3\cdot S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot S_1(n)$

$$3\cdot S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$3\cdot S_2(n) = (n+1)\cdot\left[(n+1)^2 - 1 - 3\cdot\frac{n}{2}\right]$$

$$3\cdot S_2(n) = (n+1)\cdot\left[n^2 + 2\cdot n - \frac{3\cdot n}{2}\right]$$

$$3\cdot S_2(n) = n\cdot(n+1)\cdot\left[n + \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

....

Summenformel für die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen von 1 bis n:

Sei: $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$

Es gilt:

$(0+1)^4 = 0^4 + 4\cdot0^3\cdot1 + 6\cdot0^2\cdot1^2 + 4\cdot0\cdot1^3 + 1^4$
$(1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot1^3\cdot1 + 6\cdot1^2\cdot1^2 + 4\cdot1\cdot1^3 + 1^4$
$(2+1)^4 = 2^4 + 4\cdot2^3\cdot1 + 6\cdot2^2\cdot1^2 + 4\cdot2\cdot1^3 + 1^4$
$(3+1)^4 = 3^4 + 4\cdot3^3\cdot1 + 6\cdot3^2\cdot1^2 + 4\cdot3\cdot1^3 + 1^4$
....
$(n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3\cdot1 + 6\cdot n^2\cdot1^2 + 4\cdot n\cdot1^3 + 1^4$

$1^4+2^4+ \ldots +$

$(n+1)^4 = 1^4+2^4+ .. +n^4 + 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) + n+1$
$(n+1)^4 = 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) + (n+1)$
$4\cdot S_3(n) = (n+1)^4 - (n+1) - 4\cdot S_1(n) - 6\cdot S_2(n)$

$$4\cdot S_3(n) = (n+1)^4 - (n+1) - 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - 6\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$4\cdot S_3(n) = (n+1)\cdot\left[(n+1)^3 - 1 - 2\cdot n - n\cdot(2n+1)\right]$$

$$4\cdot S_3(n) = (n+1)\cdot\left[n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 - 1 - 2\cdot n - 2\cdot n^2 - n\right]$$

$$4\cdot S_3(n) = (n+1)\cdot\left[n^3 + n^2\right] = n^2\cdot(n+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

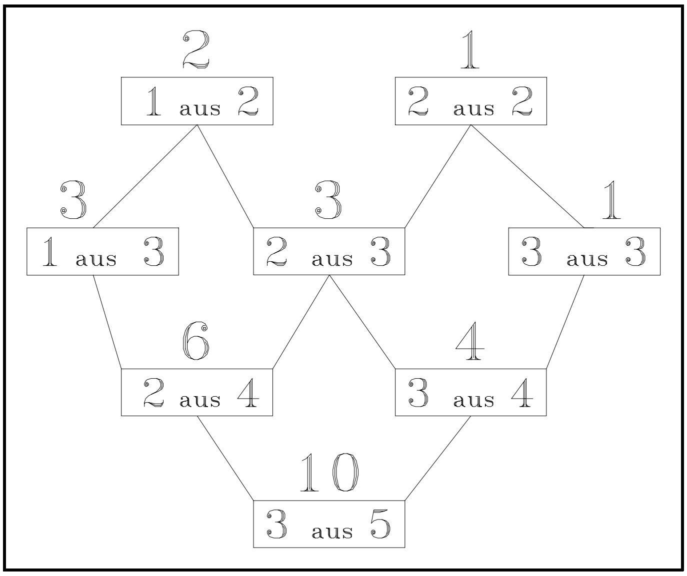
Rekursives Verfahren zur Herleitung des Pascalschen Dreiecks (Rechnen mit Binomialkoeffizienten)

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Zahlen aus 5 auszuwählen?[8]

1.: Entweder wird die fünfte Zahl ausgewählt, oder nicht. Wenn sie ausgewählt wurde, so sind noch zwei weitere Zahlen aus den restlichen 4 Zahlen zu ziehen, ansonsten 3 aus den restlichen 4.

2.: Wenn noch 2 Zahlen aus 4 zu ziehen sind, gilt: Entweder wird die vierte Zahl ausgewählt, oder nicht. Wenn sie ausgewählt wurde, so ist noch eine weitere Zahl aus den restlichen 3 Zahlen zu ziehen, ansonsten 2 aus den restlichen 3.

3.: ... usw.



Die jeweilige Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich stets als die Summe der Möglichkeiten in den 'darüberliegenden' Alternativstufen, es sei denn, man ist an einem Ende (mit leicht bestimmbarer Anzahlgröße) angelangt.

Indem man nun das nebenstehende Diagramm durch Anfügen einer entsprechenden Figur für z.B. die Anzahl der Möglichkeiten für '2 aus 5', '4 aus 5' etc. ergänzt, vernetzt man die Struktur zum Pascalschen Dreieck, wobei die Problematik: 0! := 1 ausgeklammert bleibt.

Zum Lernabschnitt 2:

Eine Auswahl geeigneter Literatur (Stand: August 1995):

Ehrenwirth Verlag:	Anschauliche Geometrie (Band 1 und Band 2)
Schwann Verlag:	Mathematik für Gymnasien, Band 3, 7.Schuljahr
Klett Verlag:	Lambacher-Schweitzer, Geometrie Eins
Westermann Verlag:	Hahn/Dzewas, Mathematik 8
Schroedel Verlag:	Schütz/Wurl, Mathematik für Gymnasien 8
Heinz Moos Verlag:	Die Welten des *M.C. Escher*

---

[8] **Binomischer Lehrsatz:** $(a+b)^5 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)$; Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Summanden a^3b^2 beim Ausmultiplizieren zu bilden, d.h. 3 Summanden a aus 5 Klammern zu wählen?

Zum Lernabschnitt 3:

Leichter Einstieg: [leichte Intervall- (Definitionsmengen-) Trennung]

Bsp.: $\frac{3}{x+2} < 5$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\Rightarrow$ 1) $3 < 5\cdot(x+2)$; $D_1 =]-2\,;\infty[$ oder 2) $3 > 5\cdot(x+2)$; $D_2 =]-\infty\,;-2[$

$\Leftrightarrow$ 1) $-\frac{7}{5} < x$; $D_1 =]-2\,;\infty[$ $\vee$ 2) $-\frac{7}{5} > x$; $D_2 =]-\infty\,;-2[$

$\Rightarrow$ $L_1 = \left]-\frac{7}{5}\,;\infty\right[$ $\vee$ $L_2 =]-\infty\,;-2[$

$\Leftrightarrow$ $L = \left]-\frac{7}{5}\,;\infty\right[\cup]-\infty\,;-2[= \mathbb{Q} \setminus \left[-2\,;-\frac{7}{5}\right]$

Vertiefung 1: [Definitionsmengen bestehen z.B. aus Teilintervallen]

Bsp.: $\frac{2}{1-x} > \frac{1}{x}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\,;1\}$; HN: $x\cdot(x-1)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{2\cdot x}{(1-x)\cdot x} > \frac{1\cdot(1-x)}{x\cdot(1-x)} \quad \Big| \cdot \text{HN}$; $D_1 = \mathbb{Q} \setminus [0\,;1]$; $D_2 =]0\,;1[$

$\Rightarrow$ 1) $2\cdot x < 1-x$ oder 2) $2\cdot x > 1-x$

$\Rightarrow$ $L_1 = \mathbb{Q}^-$ $\vee$ $L_2 = \left]\frac{1}{3}\,;1\right[$

$\Rightarrow$ $L = \mathbb{Q}^- \cup \left]\frac{1}{3}\,;1\right[$

[Eine Lösungsmenge kann leer sein]

Bsp.: $\frac{3}{x+1} \le \frac{4}{x-2}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\,;2\}$; HN: $(x+1)\cdot(x-2)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{3\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-2)} \le \frac{4\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(x+1)} \quad \Big| \cdot \text{HN}$; $D_1 = \mathbb{Q} \setminus [-1\,;2]$; $D_2 =]-1\,;2[$

$\Rightarrow$ 1) $3\cdot(x-2) \le 4\cdot(x+1)$ oder 2) $3\cdot(x-2) \ge 4\cdot(x+1)$

$\Leftrightarrow$ 1) $-10 \le x$ $\vee$ 2) $-10 \ge x$

$\Rightarrow$ $L_1 = [-10\,;-1[\cup]2\,;\infty[$ $\vee$ $L_2 = \{\ \}$

$\Rightarrow$ $L = L_1$

Vertiefung 2: [Bruchungleichung mit quadratischen Termen]

Bsp.: $x + \frac{1}{x} \le \frac{x^2+2}{x} - 1$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ 1) $x^2 + 1 \le x^2 + 2 - x$; $D_1 = \mathbb{Q}^+$ $\vee$ 2) $x^2 + 1 \ge x^2 + 2 - x$; $D_1 = \mathbb{Q}^-$

$\Rightarrow$ $L_1 =]0\,;1]$ $\vee$ $L_2 = \{\ \}$

$\Rightarrow$ $L = L_1$

[Bruchungleichung großen Schwierigkeitsgrades]

Bsp.: $\frac{5x-6}{25x^2-4} + \frac{9-\frac{5}{2}x}{15x^2-6x} < \frac{4x-5}{20x^2+8x} - \frac{1}{6x}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\,;0\,;\frac{5}{2}\right\}$; HN: $(5x-2)\cdot(5x+2)\cdot 12x$

$\Rightarrow$ $(5x-6)\cdot 12x + \left(9-\frac{5}{2}x\right)\cdot(5x-2)\cdot 2 < (4x-5)\cdot(5x-2)\cdot 3 - 2\cdot(25x^2-4)$; $D_1 = \left]\frac{2}{5} ; \infty\right[\cup \left]-\frac{2}{5} ; 0\right[$

$\vee$ $(5x-6)\cdot 12x + \left(9-\frac{5}{2}x\right)\cdot(5x-2)\cdot 2 > (4x-5)\cdot(5x-2)\cdot 3 - 2\cdot(25x^2-4)$; $D_2 = \left]-\infty ; -\frac{2}{5}\right[\cup \left]0 ; \frac{2}{5}\right[$

Vertiefung 3: [Doppelungleichung ("$\wedge$") bzgl. verschiedener Definitionsmengen ("$\vee$")]

Bsp.: $-2 < \dfrac{5}{2x+1} \leq 1$; $D = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\Rightarrow$ 1) $(-4x-2 < 5) \wedge (5 \leq 2x+1)$; $D_1 = \left]-\frac{1}{2} ; \infty\right[$ oder

2) $(-4x-2 > 5) \wedge (5 \geq 2x+1)$; $D_2 = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$

$\Rightarrow$ $L_1 = [\,2 ; \infty\,]$ $\vee$ $L_2 = \left]-\infty ; -\frac{7}{4}\right[$

$\Rightarrow$ $L = \mathbb{Q} \setminus \left[-\frac{7}{4} ; 2\right[$

Vertiefung 4: [Bruchungleichungen mit Formvariablen führen zu häßlichen Fallunterscheidungen]

Bsp.: $\dfrac{x}{x-a} \leq a$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{ a \}$

$\Rightarrow$ 1) $a^2 \leq x\cdot(1-a)$; $D_1 =]\,a ; \infty\,[$ $\vee$ 2) $a^2 \geq x\cdot(1-a)$; $D_2 =]\,-\infty ; a\,[$

Führt zu Fallunterscheidungen für: a>1 ; a<1 ; a=1 !

Klasse 9

(60 Stunden)

	Lernabschnitte	Richtzeiten	Seite
1	**Lineare Optimierung**	15 Stunden	24
2	**Funktionen:** Relationen, Funktionsbegriff, Quadratische Funktionen	15 Stunden	26
3	**Geometrie:** Scherung, Hintereinanderausführung Zentrischer Streckungen	15 Stunden	29
4	**Codierung und Verschlüsselung**	15 Stunden	32

Vorbemerkung:

Unter dem Gesichtspunkt, dass in den zusätzlich zur Verfügung stehenden Stunden Inhalte der späteren Jahrgangsstufen nicht vorgezogen unterrichtet werden dürfen, sondern Raum geboten wird u.a. für:

1) inhaltliche und methodische Vertiefungen bei aktuell behandelten Themen,
2) Erweiterung der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in bezug auf Inhalte, für die bisher wenig Zeit blieb,
3) mehr problem- und projektorientierte Unterrichtsformen in Verbindung mit einem größeren Maß an Eigentätigkeit bzw. selbständiger Erarbeitung in Gruppen,
4) Verbindungen zu anderen Fächern; stärkere Betonung von mathematischen Problemstellungen in Anwendungssituationen,
5) historische Bezüge, die ein allgemeinbildendes Verständnis von Mathematik als (z.T. geisteswissenschaftliche) Kulturtechnik in der Entwicklung, z.T. repräsentiert in Personen, darstellen,
6) einen verständigen Umgang mit mathematischen 'Werkzeugen' (Taschenrechner, Computersoftware etc.) mit der Notwendigkeit, gelieferte Ergebnisse auf Tragfähigkeit analysieren und beurteilen zu können,

zielen die 4 Lernabschnitte auf folgende Aspekte der Vertiefung:

Thema 1 knüpft spiralisch an die bisherigen Unterrichtsinhalte: Geradengleichungen, Systeme linearer Gleichungen (in 2 Variablen) sowie dem Abschnitt über Ungleichungen an. Neben dem tragenden Aspekt der Motivation durch Anwendungsbezug werden graphische Methoden der Lösungsfindung vertieft und dabei auch nicht unwesentlich die Raumanschauung beim Übergang in das Dreidimensionale geschult. Zusätzlich werden Elemente der Analytischen Geometrie vorbereitet, die Ebenengleichung in Normalenform.

Thema 2: Neben der expliziten, präzisen Fundierung des tragenden Begriffs: 'Funktion' ist dieser Lernabschnitt in Verbindung mit den Lerninhalten zu 'Quadratische Gleichungen' des Normalzuges zu sehen; wiederum wird eine Vernetzung algebraischer und graphischer Lösungsmethoden und -interpretationen intendiert. Mit der Bestimmung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen 2. Grades werden nicht nur Elemente der 'p-q-Formel' (Scheitelpunkt einer Parabel; Symmetrie) verständlicher, sondern es werden auch spätere Inhalte des Mathematikunterrichtes wie Verschiebung, Streckung und Stauchung von Funktionsgraphen vorbereitet sowie für physikalische Fragestellungen, z.B. aus der Mechanik, die auf quadratische Abhängigkeiten führen (z.B. Wurf), verständige Lösungsmöglichkeiten (Extremaluntersuchung - Scheitelpunkt; Nullstellen) zur Verfügung gestellt. Darüber hinaus wird durch die begriffliche Präzisierung: Zuordnung - Relation der Funktionsbegriff als das Besondere in einem übergeordneten Zusammenhang erkennbar.

Thema 3: Der schon in den Klassenstufen 7 und 8 begonnene Ausbau der Geometrie wird bis zur Gruppe der perspektiven Ähnlichkeitsabbildungen fortgesetzt. Neben der wiederum stark prägenden, ästhetischen Komponente ist die weitere, selbständige Entwicklung struktureller Einsichten beabsichtigt, die selbstverständlich erscheinende Rechengesetze in einem neuem Zusammenhang zeigen. Neben dem Gruppenbegriff können für den nachfolgenden Unterricht Elemente der Vektor- und Matrizenrechnung als vorbereitend und tragend angesehen werden.

Thema 4 (Bezug zu ITG / Informatik) baut auf dem vertiefenden Lernabschnitt über Zahlsysteme der Klassenstufe 7 auf. Neben dem wünschenswerten Aspekt der verständigen Beurteilung von Alltagserfahrungen (Strichcodes etc.) kommen bei den Fragen der Ver- und Entschlüsselung von Texten Elemente der Matrizenrechnung, der Restklassenbildung und der (eindeutigen) Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme zum Tragen.

Lineare Optimierung

15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen, dass die Lösungen zu einer Linearen Ungleichung in 2 Variablen Zahlenpaare sind und dass die zugehörigen Punkte in einer durch die Lösungen von: $a \cdot x + b \cdot y = c$ begrenzten Halbebene liegen. Wissen, dass die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems Schnittmenge der Lösungsmengen aller einzelner Ungleichungen ist, und die zugehörige Punktmenge graphisch bestimmen können. Wissen, dass durch verschiedene Einsetzungen für die Formvariable n in: $y = m \cdot x + n$ (m fest) eine Schar paralleler Geraden beschrieben wird.	Lineare Ungleichungen der Form: $a \cdot x + b \cdot y \leq c$ $(a \cdot x + b \cdot y \geq c)$ und die graphische Darstellung der zugehörigen Lösungsmengen. Systeme linearer Ungleichungen mit 2 Variablen und ihre graphische Lösung. Lineare Gleichungen in Normalenform $y = m \cdot x + n$ mit Parametern, insbesondere: m fest, n variabel.	Die Unterrichtseinheit des Normalplanes für Klassenstufe 9: 'Systeme linearer Gleichungen' sollte schon behandelt worden sein. Der unterschiedlichen Darstellung der Lösungsmenge bezüglich verschiedener Grundmengen, z.B.: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (diskrete Punkte bzw. zusammenhängende Fläche), sollte Beachtung geschenkt werden.
Anwendungsaufgaben zur Linearen Optimierung mit 2 Variablen durch ein zeichnerisches Verfahren lösen können. Begründen können, dass allen Paaren, deren zugehörige Punkte auf einer bestimmten Geraden liegen, derselbe Funktionswert der Zielfunktion zugeordnet ist.	Optimale Funktionswerte einer linearen (Ziel-)Funktion ($b \neq 0$) $\mathbf{f} : (x ; y) \mapsto z \mid z = a \cdot x + b \cdot y$, deren Definitionsmenge die Lösungsmenge eines Linearen Ungleichungssystems ist (zulässiger Bereich). Zeichnerische Ermittlung des optimalen Funktionswertes durch Parallelverschiebung von Geraden zu: $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{z}{b}$, z variabel, im zulässigen Bereich. - Lösungen der Optimierungsaufgabe als Punkte des zulässigen Bereichs.	
Entscheiden können, ob eine Optimierungsaufgabe Lösungen besitzt, und die Lage des (oder der) Lösungspunkte(s) eingrenzen können.	Erarbeitung eines Eckenkriteriums, wenn die Grundmenge des Ungleichungssystems: $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$ ist. - Überprüfung des Kriteriums, wenn die Grundmenge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist.	Ist eine Optimierungsaufgabe lösbar, so ist mindestens ein Lösungspunkt ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Lineare Gleichungen mit 3 Variablen in Achsenabschnittsform umwandeln können und die Lösungsmenge in einfachen Fällen als Teil einer Ebene im dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen können.	Lineare Gleichung mit 3 Variablen (Ebenengleichung) in Achsenabschnittsform: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; graphische Lösung für den Fall a>0, b>0, c>0 und die Grundmenge $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$.	Hinweise zur Herleitung der Achsenabschnittsform und der graphischen Darstellung im Anhang.
Lineare Ungleichungen mit 3 Variablen in einfachen Fällen graphisch lösen können.	Lineare Ungleichung mit 3 Variablen in der Form: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1$ mit a>0, b>0, c>0 über der Menge $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$.	
Das graphische Lösungsverfahren für lineare Ungleichungssysteme in 2 Variablen auf Systeme von nicht mehr als 3 lineare Ungleichungen in drei Variablen übertragen können.	Systeme linearer Ungleichungen und ihre zeichnerische Lösung mit Hilfe von 'Begrenzungsebenen'.	Durch die genannten Einschränkungen liegen die zugehörigen Punkte der Lösungsmenge einer Ungleichung stets im 1. Oktanten. Das Gebiet enthält den Ursprung und wird durch die 3 Koordinatenebenen, sowie durch die Ebene mit der Gleichung: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ begrenzt.
Anwendungsaufgaben zur linearen Optimierung mit 3 Variablen in einfachen Fällen lösen können.	Optimale Funktionswerte einer linearen Funktion $\mathbf{f} : (x ; y ; z) \mapsto w \mid w = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$, die auf der Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems definiert ist. Lösungen der Optimierungsaufgabe als Eckpunkte des zulässigen Bereichs.	Durch die Darstellung des zulässigen Bereichs der Optimierungsaufgabe kann das räumliche Anschauungsvermögen geschult werden. Durch die Beschränkung auf die Grundmenge $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$, für die das Eckenkriterium gilt, kann die Lösung der Optimierungsaufgabe durch die Berechnung der Werte der Zielfunktion in den Ecken des zulässigen Bereichs ermittelt werden.

Funktionen: Relationen, Funktionsbegriff, Quadratische Funktionen
15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für ausgewählte Relationen zwischen zwei endlichen Mengen kennen und angeben können.	Relationen zwischen zwei endlichen Mengen M_1 und M_2 - im Pfeildiagramm, - als Paarmenge, - im Koordinatensystem.	Die Unterrichtseinheit des Normalplanes für Klassenstufe 9: 'Reelle Zahlen und Wurzeln' muß schon behandelt worden sein.
Definitions- und Wertemenge einer gegebenen Relation angeben können.	Definitionsmenge einer Relation als Menge aller Komponenten, die in den Paaren an erster Stelle auftreten, Wertemenge als Menge aller Komponenten, die in den Paaren an zweiter Stelle auftreten, gemäß dem Beispiel: $R := \{ (1;2) , (1;3) , (2;1) \}$, $D_R := \{1;2\}$, $W_R := \{1;2;3\}$. Bestimmung von D_R und W_R auch anhand der beiden anderen Darstellungsmöglichkeiten für Relationen.	Als Beispiele für Relationen können auch Verwandtschaftsverhältnisse u.ä. herangezogen werden.
Erläutern können, was mit dem Begriff "Produktmenge zweier Mengen M_1 und M_2" gemeint ist.	Das kartesische Produkt aus $M_1 = \{1;2\}$ und $M_2 = \{1;2;3\}$ ist die Menge $M_1 \times M_2 := \{ (1;1) , (1;2) , (1;3) , (2;1) , (2;2) , (2;3) \}$.	Hier ist nur ein Verständnis für die Paarmengendarstellung einer Relation intendiert.
Eine Definition für den Begriff der Relation angeben können.	<u>Definition (Relation):</u> Unter einer Relation R zwischen zwei Mengen M_1 und M_2 versteht man eine Teilmenge der Menge $M_1 \times M_2$: $R \subseteq M_1 \times M_2$.	Hier sollte darauf verwiesen werden, dass auch Relationen zwischen nicht endlichen Mengen möglich sind.
Unter gegebenen Relationen Funktionen heraussuchen und entsprechende Auswahlkriterien nennen können.	Funktionen als <u>eindeutige</u> Zuordnungen, Auswahlkriterien: - jede Zahl darf in der Paarmengendarstellung nur einmal an erster Stelle vorkommen, - im Pfeildiagramm darf von einem Element nur ein Pfeil ausgehen, - im Koordinatensystem darf auf jeder Parallelen zur y-Achse höchstens ein Punkt des Funktionsgraphen liegen.	Der Begriff der Funktion ist bereits aus dem Unterricht in Klassenstufe 8 bekannt.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Die spezifische Symbolik für Funktionen kennen und richtig anwenden können.	Symbolik und Begriffsbildung gemäß dem Beispiel: $M_1 := \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $M_2 := \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $f := \{(1;1), (2;3), (3;5), (4;7)\}$. $M_1 \times M_2$: Grundmenge von f , $D_f = \{1;2;3;4\} \subseteq M_1$: Definitionsmenge von f , $W_f = \{1;3;5;7\} \subseteq M_2$: Wertemenge von f ; M_2 heißt Zielmenge. Zuordnungsvorschriften von Funktionen in der Weise: $f: x \mapsto y \mid y = f(x) \wedge x \in D_f \wedge y \in W_f$, bzw. auch $f: D_f \rightarrow W_{f.}$ (M_2).	Zwischen den Zuordnungspfeilen $\rightarrow$ und $\mapsto$ sollte unterschieden werden.
Die Begriffe: Stelle der Funktion f, Funktionswert, Funktionsterm und Funktionsgleichung kennen und richtig anwenden können.	Unterscheidung zwischen Funktionswert und Funktionsterm gemäß dem Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto y \mid y = f(x) = x^2 - 6$. $y = x^2 - 6$: Funktionsgleichung, $x^2 - 6$: Funktionsterm f(x) ; mit f(2), f(5), ... lassen sich Funktionswerte darstellen. Stellen der Funktion f als Elemente der Definitionsmenge D_f.	
Anhand der Zuordnungsvorschriften quadratische Funktionen erkennen können, Funktionsterme quadratischer Funktionen in Scheitelpunktsform darstellen können (und umgekehrt) und zu verschobenen Normalparabeln Zuordnungsvorschriften angeben können. Graphen ganzrationaler Funktionen 2. Grades, ohne Wertetabelle, nur aus der Kenntnis des Scheitelpunktes und des Streckungsfaktors skizzieren können.	Normalparabel; Verschiebung der Normalparabel parallel zur y-Achse, parallel zur x-Achse, Streckung und Stauchung. Zuordnungsvorschrift für quadratische Funktionen in allgemeiner Form und in Scheitelpunktsform: $f: x \mapsto y \mid y=f(x)=a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - u)^2 + v \wedge x \in \mathbb{R}$. Umformung der allgemeinen Zuordnungsvorschrift in die Scheitelpunktsform und umgekehrt. Graphen von Parabeln.	

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen und begründen können, dass ein Streckungsfaktor ohne Auswirkung auf die Nullstellen einer Funktion ist. Quadratische Gleichungen mit Hilfe der Graphen der zugehörigen quadratischen Funktionen lösen können.	Lösen quadratischer Gleichungen - durch Nullstellenbestimmung entsprechender quadratischer Funktionen, - aus den Koordinaten des Scheitelpunkts der jeweils zugehörigen quadratischen Funktion; Symmetrieeigenschaft und Zusammenhang von x- und y-Koordinaten einer verschobenen Normalparabel.	Die nachfolgenden Inhalte sind mit dem Lernabschnitt des Normalplanes für Klassenstufe 9: 'Quadratische Gleichungen' sinnvoll zu verbinden. Scheitelpunkt des Graphen zu f mit f: $x \mapsto y \mid y=f(x)= x^2+px+q \wedge x \in \mathbb{R}$ ist $S\left(\frac{-p}{2} \,\middle|\, q-\frac{p^2}{4}\right) =: \left(x_S \mid y_S\right)$. Es gilt: $\mathbf{L} = \left\{x_S+\sqrt{-y_S}\ ;\ x_S-\sqrt{-y_S}\right\}$; $y_S<0$.
Den Begriff der Umkehrfunktion f* zu einer Funktion f kennen und Bedingungen für deren Existenz angeben können. Für ganzrationale Funktionen 2. Grades die Definitionsmenge (und Zielmenge) geeignet einschränken können, so dass f und f* wechselseitig umkehrbar sind; wissen, dass dann $D_f=W_{f*}$ und $D_{f*}=W_f$ gilt. Zu f* den Funktionsterm bestimmen können. Begründen können, dass der Übergang zur Umkehrfunktion im kartesischen Koordinatensystem (bei gleichen Achsenmaßstäben) graphisch einer Spiegelung an der Identität entspricht.	Die Vertauschung der Koordinaten in den Paaren von f mit: f: $x \mapsto y \mid y=f(x)=a\cdot x^2 + b\cdot x + c \wedge x \in \mathbb{R}$, führt zu einer Relation, aber i.a. nicht zu einer Funktion. Umkehrfunktion f* zu f für geeignete ganzrationale Funktionen 2. Grades. Achsensymmetrie der Graphen zu f* und f bzgl. der Identität im maßstabsgleichen Koordinatensystem.	Es kann auch sinnvoll sein, diese Inhalte <u>vor</u> der Lösungsmengenbestimmung quadratischer Gleichungen zu behandeln.

Geometrie: Scherung, Hintereinanderausführung zentrischer Streckungen, *Ähnlichkeit*
15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen, dass eine Scherung eine Punktabbildung der Ebene auf sich ist, und eine Definition dieser Abbildung angeben können. Wissen, dass jeder Punkt F der Achse **a** Fixpunkt der Abbildung ist und umgekehrt jeder Fixpunkt der Scherung Element von **a** ist.	Die Scherung als Punktabbildung der Ebene auf sich. Def.: Eine Abbildung $\mathbf{f}: P \mapsto P'$ heißt Scherung an der Achse (Gerade) **a** um den (orientierten) Winkel γ, wenn $PP' \parallel \mathbf{a}$ und $\sphericalangle PFP' = \bar{\gamma}$ $(\bar{\gamma} \neq 0°)$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von P auf **a** ist.	Es empfiehlt sich, den ersten Teilabschnitt vor dem Lernabschnitt: 'Satzgruppe des Pythagoras' zu behandeln, da z.B. der Kathetensatz des Euklid organisch aus der Flächenverwandlung von Rechtecken über eine Doppelscherung herleitbar ist. - Zum Beweis der Geradentreue der Scherung benötigt man Strahlensätze.
Beliebige Punkte der Ebene durch Scherung abbilden können. Begründen können, dass die Scherung geraden-, parallelen-, mittelpunkts- und flächeninhaltstreu ist.	Abbildung von Punkten, Strecken, Geraden, Dreiecken und Vierecken.	Bildet man Strecken durch Scherung ab, die auf zur Achse **a** parallelen Geraden liegen, so läßt sich unmittelbar begründen, dass Original- und Bildstrecke gleich lang sind. Durch diesen Sachverhalt kann gut das Prinzip des Cavalieri vorbereitet werden.
Figuren durch Hintereinanderausführung verschiedener Scherungen abbilden können.	Hintereinanderausführung verschiedener Scherungen.	
Eine Abbildungsvorschrift für die zentrische Streckung kennen. *Durch zentrische Streckung ähnliche Figuren erzeugen können.*	*Zentrische Streckung als Abbildung der Ebene auf sich.* *Maßstabsgerechte Vergrößerung und Verkleinerung von Figuren durch zentrische Streckung mit positivem Streckfaktor.*	Lernziele und Lerninhalte entsprechen dem Rahmenplan des Normalzuges.
Die Geraden-, Winkel- und Parallelentreue der zentrischen Streckung begründen können.	Geraden-, Winkel- und Parallelentreue der zentrischen Streckung.	Die nebenstehenden Lernziele und Lerninhalte sind mit den oberen didaktisch sinnvoll zu verbinden.
Figuren durch zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor abbilden können. Wissen, dass für Flächeninhalte der Streckungsfaktor k^2, für Rauminhalte k^3 ist.	Maßstabsgerechte Vergrößerung und Verkleinerung von (räumlichen) Figuren durch zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor.	

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Figuren durch mehrere zentrische Streckungen mit gleichem Streckzentrum hintereinander abbilden können.	Verketten zentrischer Streckungen mit gleichem Streckzentrum.	Aus strukturellen Erwägungen sollte insbesondere auch der Fall: $k_1 \cdot k_2 = 1$ betrachtet werden.
Wissen und begründen können, dass für die Hintereinanderausführung gilt: $\mathbf{S}_{Z,k2} \circ \mathbf{S}_{Z,k1} = \mathbf{S}_{Z,k1 \cdot k2}$.	Die Gruppe der zentrischen Strekkungen mit gleichem Streckzentrum; die Menge $\mathbf{S}_Z$.	
Figuren durch zwei zentrische Streckungen mit verschiedenen Streckzentren hintereinander abbilden können.	Verketten zentrischer Streckungen mit verschiedenen Streckzentren: a) $k_2 \neq \frac{1}{k_1}$; die Menge $\mathbf{S}$, die Gerade $g(Z_1;Z_2)$ als Fixgerade, b) $k_2 = \frac{1}{k_1}$; die Menge $\mathbf{V}$.	
Wissen, dass die Verkettung zweier zentrischer Streckungen entweder a) eine zentrische Streckung ist mit: $k_3 = k_1 \cdot k_2$ und $Z_3 \in g(Z_1;Z_2)$, oder b) eine Verschiebung $\vec{\mathbf{v}}$.		
An geeigneten Beispielen konstruktiv nachweisen können, dass das Assoziativgesetz in $\mathbf{S}$ und $\mathbf{V}$ gilt.	Die (nichtkommutative) Gruppe $\mathbf{S} \cup \mathbf{V}$ der perspektiven Ähnlichkeitsabbildungen.	An entsprechenden Stellen sollte von der Möglichkeit des strukturellen Vergleichs zu den Zahlenmengen Gebrauch gemacht werden.
Die Gruppenaxiome nennen und begründen können, dass $\mathbf{S}$ alleine <u>keine</u> Gruppe bildet.		Es erscheint nicht notwendig, den Begriff der Untergruppe besonders zu problematisieren.
An geeigneten Beispielen die fehlende Kommutativität, die Existenz des (individuellen) Inversen sowie die Existenz des (universellen) Neutralen (als Element von $\mathbf{V}$ oder $\mathbf{S}$) nachweisen können.		

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Punkte im Koordinatensystem durch Scherung und zentrische Streckung abbilden können. Für geeignete, einfache Beispiele die zur Scherung bzw. zur zentrischen Streckung gehörende affine Abbildung bei Vorgabe von 3 Punkten mit den zugehörigen Bildpunkten bestimmen können.	Abbildung von Punkten im Koordinatensystem. Bestimmung der zweidimensionalen (quadratischen) Matrix und des Verschiebungsvektors $\vec{\mathbf{v}}$ der Abbildungsgleichung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.	Die nebenstehenden Inhalte sind als Zusatzstoff nach Maßgabe der zur Verfügung stehenden Zeit zu verstehen.

Codierung und Verschlüsselung

15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen, dass ein Code eine Ersatzdarstellung von Zeichen durch andere Zeichen oder Zeichenketten ist. Die wichtigen Codes: BCD, ASCII, ISO (7 Bit / 8 Bit) kennen.	BCD, ASCII, ISO; Dual- und Se- (Hexa-) dezimaldarstellung von Zeichen. Anwendungsfälle von Codes, z.B. Drucker- / Terminalsteuerung, Groß- / Kleinschreibung (Umwandlung).	Die Bedeutung der Codes insbesondere für die Informationstechnologie soll exemplarisch besprochen werden. Hier ist durchaus an den Einsatz entsprechender Software, keinesfalls aber an Programmierung gedacht. Zur Vertiefung der Einheit Zahlsysteme aus Klasse 7 (Profil) kann z.B. auch die Addition von Sedezimalzahlen behandelt werden.
Die im Warenwirtschaftsverkehr bedeutenden Codes EAN und ISBN und deren Aufbau kennen. Die Bedeutung der Prüfziffern derartiger Codes sowie ihre Wirksamkeit und Grenzen bei der Fehlererkennung kennen.	Gliederung der Codes als Klassifizierungsmuster; Prüfziffernbildung; Fehlererkennung; Grenzen der Fehlererkennung.	Es ist durchaus hinreichend, die Bedeutung und Wirksamkeit von Prüfziffernverfahren exemplarisch an einem Code ausführlich mathematisch zu analysieren. Die Relevanz derartiger Verfahren kann demonstrativ mit Hilfe einer Simulation von Strichcodelesern und deren Lesefehlerhäufigkeit gezeigt werden.
Eine einfache Methode zur Verschlüsselung und Entschlüsselung von Nachrichten (Geheimschrift) kennen und nach dieser Methode verschlüsselte Nachrichten entschlüsseln können.	Verschlüsselung und Entschlüsselung von Nachrichten. <u>Beispiele:</u> Verschiebung im Alphabet; Entschlüsselung durch Buchstabenhäufigkeitsanalyse.	Eine z.B. mit Font "WINDINGS" geschriebene Nachricht macht das Prinzip der einfachen Ersetzung deutlich. Die Entschlüsselung einer Schatzkarte kann für die Schüler sehr motivierend sein (z.B. aus E.A.Poes 'Goldkäfer'-Erzählung). Auch der Einsatz von Computerprogrammen zur Zeichenhäufigkeitsanalyse bietet sich hier an.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen, wie Matrizen multipliziert werden, und Matrizenmultiplikationen in einfachen Fällen sicher ausführen können. Die Methode der Verschlüsselung und Entschlüsselung von Nachrichten mit Hilfe von Matrizen kennen. Wissen und begründen können, dass bei der Ersetzung von Zeichen durch Ersatzzeichen mit Hilfe von Matrizen diese Ersetzung nicht immer in gleicher Weise erfolgt. Einfache Texte mit Matrizen verschlüsseln und entschlüsseln können.	Anwendung von Codier- und Decodiermatrizen auf Texte. Das Problem der Restwertbildung.	Es ist durchaus hinreichend, die Matrizenmultiplikation als reines Operieren mit einem Zahlenschema zu behandeln. Es wird empfohlen, sich auf einfache 2×2-Matrizen beschränken.
Decodiermatrizen zu vorgegebenen Codiermatrizen bestimmen können.	Einheitsmatrix; Codier- und Decodiermatrizen; Lösen Linearer Gleichungssysteme.	Über die Sonderstellung der Einheitsmatrix soll, analog zum Zusammenhang von Eins und multiplikativem Inversen, die invertierte Matrix als Inverses der Codematrix erkannt werden. Dabei sollte auch erarbeitet werden, welche 2×2-Matrizen <u>nicht</u> invertierbar sind.

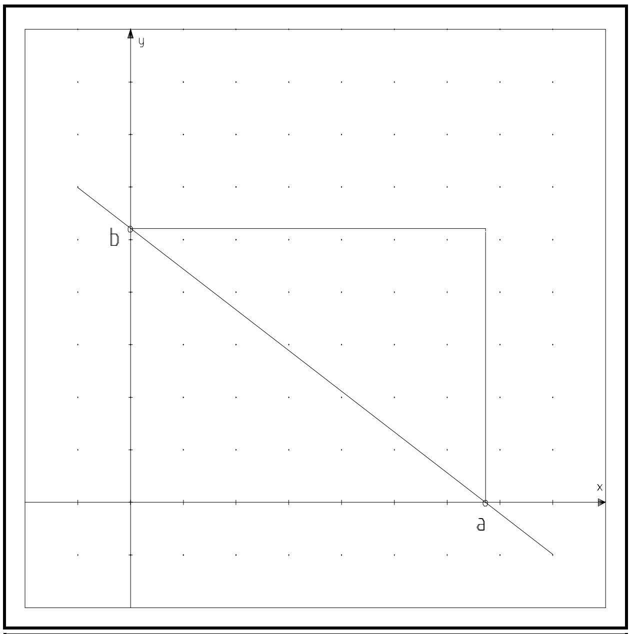
ANHANG

Zu Lernabschnitt 1:

Zur Linearen Optimierung mit zwei Variablen findet man ausführliche Hinweise zur Methodik, und umfangreiches Aufgabenmaterial, bei:
Eberhard Grammes: Lineare Optimierung - Eine Unterrichtssequenz - im Buch von Günter Schmidt (Hrsg.): Methoden des Mathematikunterrichts in Stichwörtern und Beispielen 9/10; Agentur Pedersen, Westermann-Verlag.

In der gängigen Schulbuchliteratur findet man kaum ein Unterrichtsangebot zur Linearen Optimierung mit drei Variablen.
Ein Beispiel zur graphischen Lösung eines linearen Ungleichungssystems mit drei Variablen ist dargestellt im Buch von Karl Schick: Lineares Optimieren, Verlag Diesterweg-Salle (1975).
Die dort genannten Anwendungsaufgaben zur Linearen Optimierung sind jedoch nicht zur graphischen Lösung vorgesehen und genügen meistens nicht den vorgeschlagenen Einschränkungen.

Die Achsenabschnittsform (Koordinatenform) einer Ebenengleichung kann zunächst propädeutisch durch Betrachten der Spurgeraden in den Koordinatenebenen gewonnen werden.
Eine exakte Herleitung ist mit Hilfe von Strahlensätzen möglich.



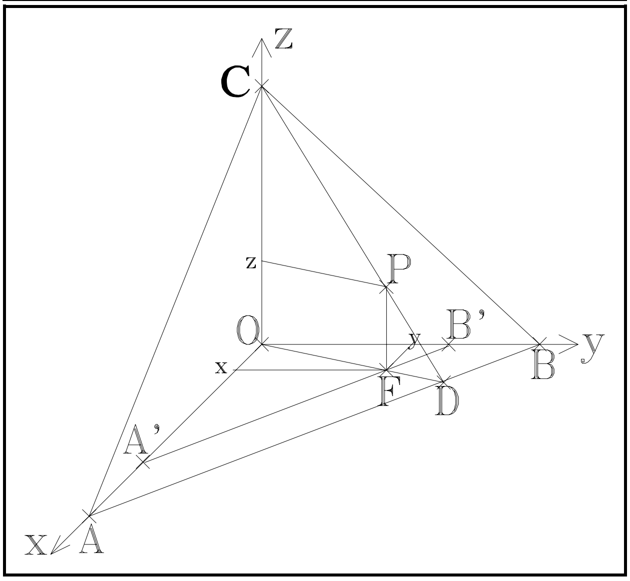
1) Geradengleichung in Achsenabschnittsform
(a > 0 ; b > 0)

$$y = -\frac{b}{a}\cdot x + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a}\cdot x + y = b$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

---

2) Ebenengleichung in Achsenabschnittsform
(a > 0 ; b > 0 ; c > 0)



E sei gegeben durch: **A**(a|0|0), **B**(0|b|0), **C**(0|0|c) und **P**(x|y|z) $\in$ E sei beliebiger Ebenenpunkt.

Die Gerade durch **C** und **P** schneidet die Spurgerade der Ebene E mit der x-y-Ebene im Punkt **D**.
Der Punkt **F** ist die Projektion von **P** auf die x-y-Ebene (Lotfußpunkt).

Es gelte: **g**(A';B') $\parallel$ **g**(A;B) $\wedge$ **F** $\in$ **g**(A';B'). - Damit gilt (in der x-y-Ebene):

(*) **g**(A';B'): $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$.

Aus dem 1. Strahlensatz folgt: (**) $\frac{a'}{a} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OD}} = \frac{b'}{b}$.

P wird nun in einem "Koordinatensystem" betrachtet, wo die z-Achse und die Gerade **g**(O;D) die "Achsen" sind. Hier gilt für die Gerade **g**(C;D):

$$(***) \quad \frac{\overline{OF}}{\overline{OD}} + \frac{z}{c} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{OF}}{\overline{OD}} = 1 - \frac{z}{c} \ .$$

Aus den Gleichungen (**) und (***) ergibt sich: $a' = \left(1 - \frac{z}{c}\right) \cdot a$ und $b' = \left(1 - \frac{z}{c}\right) \cdot b$.

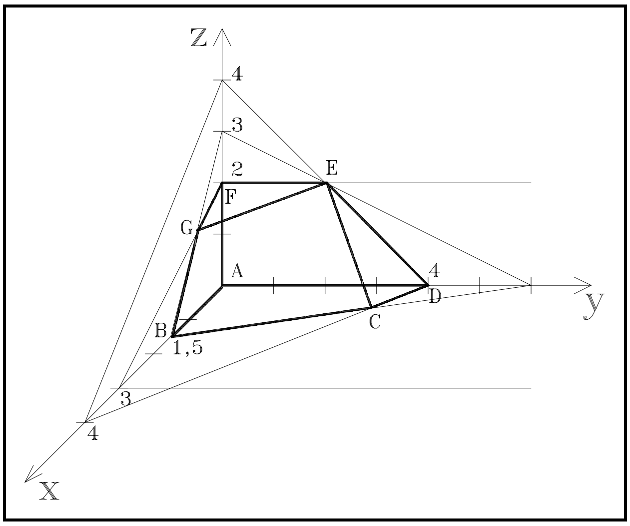
Durch Einsetzen dieser Ausdrücke für a' und b' in (*) erhält man:

$$\frac{x}{\left(1 - \frac{z}{c}\right) \cdot a} + \frac{y}{\left(1 - \frac{z}{c}\right) \cdot b} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \left(1 - \frac{z}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \ .$$

Graphische Lösung eines Systems von 3 linearen Ungleichungen mit 3 Variablen

$$\begin{Bmatrix} 1 \cdot x & + & 1 \cdot y & + & 1 \cdot z & \leq & 4 \\ 2 \cdot x & + & \frac{1}{2} \cdot y & + & 1 \cdot z & \leq & 3 \\ 2 \cdot x & & & + & 3 \cdot z & \leq & 6 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \frac{x}{4} & + & \frac{y}{4} & + & \frac{z}{4} & \leq & 1 \\ \frac{x}{1{,}5} & + & \frac{y}{6} & + & \frac{z}{3} & \leq & 1 \\ \frac{x}{3} & & & + & \frac{z}{2} & \leq & 1 \end{Bmatrix}$$



und Berechnung des Maximums einer linearen Zielfunktion **f** : $(x|y|z) \mapsto w \mid w = 15 \cdot x + 3 \cdot y + 10 \cdot z \ ; (x|y|z) \in L$.

Eckpunkt	**A**$(0\,|\,0\,|\,0)$	**B**$\left(\frac{3}{2}\,|\,0\,|\,0\right)$	**C**$\left(\frac{2}{3}\,|\,\frac{10}{3}\,|\,0\right)$	**D**$(0\,|\,4\,|\,0)$	**E**$(0\,|\,2\,|\,2)$	**F**$(0\,|\,0\,|\,2)$	**G**$\left(\frac{3}{4}\,|\,0\,|\,\frac{3}{2}\right)$
Funktions-wert w	0	$\frac{45}{2}$	20	12	26	20	$\frac{105}{4}$

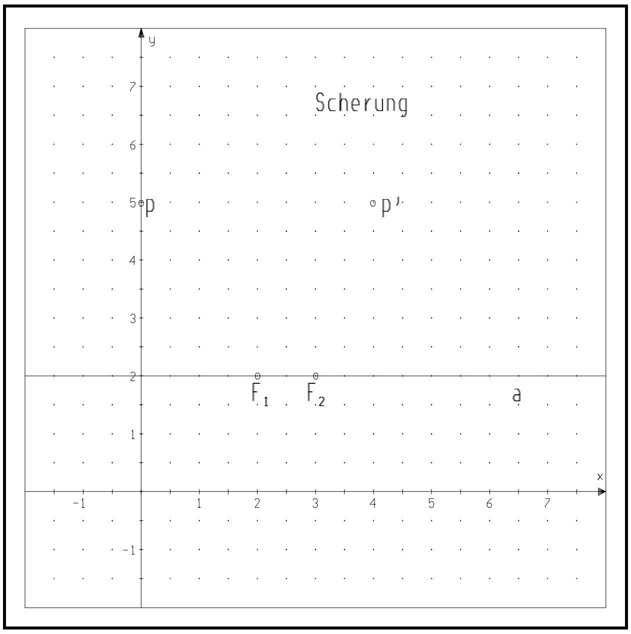
Der Lösungspunkt ist **G** ! - Der maximale Funktionswert ist: $\mathbf{w_{max}} = \frac{105}{4} = 26{,}25$.

Zu Lernabschnitt 3:

Zur Gruppe der perspektiven Ähnlichkeitsabbildungen ist ein Fülle gängiger (geometrischer) Schulbuchliteratur verfügbar. Als besonders lesenswert sei hier nur genannt das Kapitel III (Geometrie) im didaktischen Teil des Buches: H. Meschkowski (Hrsg.), Didaktik der Mathematik II, Klett-Verlag.

Die letzten beiden Lernziele und Lerninhalte des Lernabschnittes korrespondieren stark mit dem Lösen linearer Gleichungssysteme und können gut die entsprechenden Inhalte zu Matrizen des Lernabschnittes 4 vorbereiten. Zur Verdeutlichung der Intentionen im folgenden 3 Beispiele:

a) (Scherung mit achsenparalleler Scherungsachse)



Die Scherungsachse **a** mit der Geradengleichung $y = 2$ sei festgelegt durch die Fixpunkte $\mathbf{F_1}(2|2)$ und $\mathbf{F_2}(3|2)$. Der Bildpunkt von $\mathbf{P}(0|5)$ sei $\mathbf{P'}(4|5)$. - Dies führt zu den 3 Abbildungsgleichungen:

(1) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Es ergeben sich zwei Gleichungssysteme von 3 Gleichungen in jeweils 3 Variablen aus den x- und den y-Komponenten der Abbildungsgleichungen:

$$\begin{array}{rl} & 2\cdot a + 2\cdot b + e = 2 \\ \wedge & 3\cdot a + 2\cdot b + e = 3 \\ \wedge & 0\cdot a + 5\cdot b + e = 4 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} & 2\cdot c + 2\cdot d + f = 2 \\ \wedge & 3\cdot c + 2\cdot d + f = 2 \; . \\ \wedge & 0\cdot c + 5\cdot d + f = 5 \end{array}$$

<u>Lösung:</u> $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

.

---

b) (Scherung mit schräger Scherungsachse; Graphik nächste Seite)

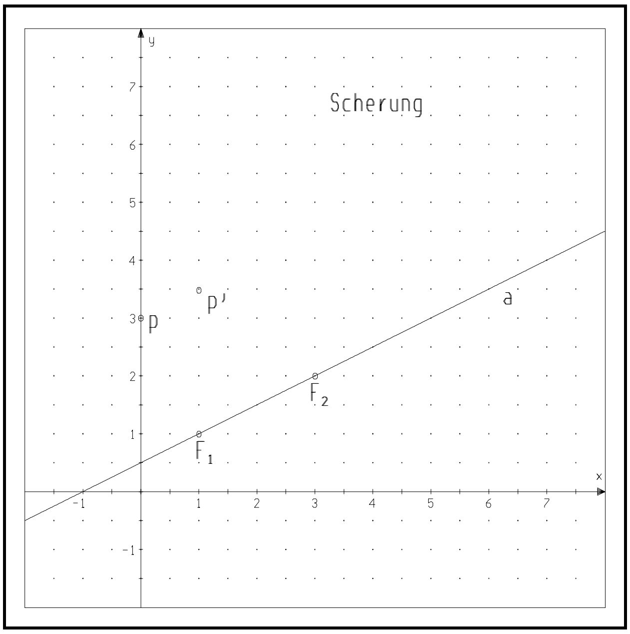
Die Scherungsachse **a** mit der Geradengleichung $y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}$ sei festgelegt durch die Fixpunkte $\mathbf{F_1}(1|1)$ und $\mathbf{F_2}(3|2)$.

Der Bildpunkt von $\mathbf{P}(0|3)$ sei $\mathbf{P'}(1|\frac{7}{2})$ [9] . - Dies führt zu den 3 Abbildungsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} .$$

[9] Hier ist das Steigungsdreieck zur Gewährleistung der Parallelität von Bedeutung.

Es ergeben sich zwei Gleichungssysteme von 3 Gleichungen in jeweils 3 Variablen aus den x- und den y-Komponenten der Abbildungsgleichungen:



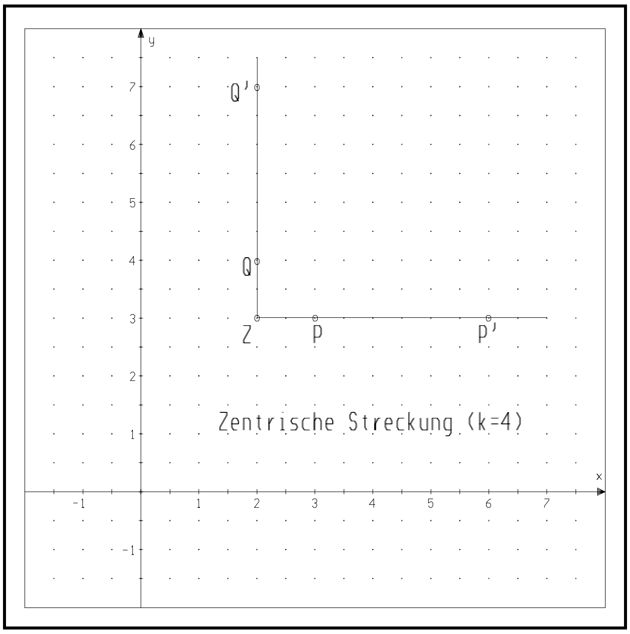
$$\begin{array}{rl} & 1\cdot a + 1\cdot b + e = 1 \\ \wedge & 3\cdot a + 2\cdot b + e = 3 \\ \wedge & 0\cdot a + 3\cdot b + e = 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} & 1\cdot c + 1\cdot d + f = 1 \\ \wedge & 3\cdot c + 2\cdot d + f = 2 \\ \wedge & 0\cdot c + 3\cdot d + f = \frac{7}{2} \end{array} .$$

<u>Lösung:</u> $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Es empfiehlt sich selbstverständlich, mit Achsenpunkten die Fixpunkteigenschaft zu bestätigen, sowie bei beliebigen Punkten eine graphische Probe durchführen zu lassen.

....

c) (Zentrische Streckung)



Eine zentrische Streckung ist eindeutig festgelegt durch die Punkte **Z**, **R** und **R'** (Zentrum, Urbildpunkt und Bildpunkt), wobei die 3 Punkte selbstverständlich auf einer Geraden liegen müssen. Im Koordinatensystem ergeben sich mit Hilfe der Strahlensätze achsenparallele 'Abbildungsgeraden bzw. -punkttripel' mit gleichem Streckungsfaktor, die als die zugehörigen Streckungen in x- bzw. y-Richtung interpretiert werden können (nebenstehend dargestellt durch die Punkttripel Z,P,P' und Z,Q,Q'). - Dies führt zu den 3 Abbildungsgleichungen:

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Die sich ergebenden zwei Gleichungssysteme lauten in diesem Fall:

$$\begin{array}{rl} & 2\cdot a + 3\cdot b + e = 2 \\ \wedge & 3\cdot a + 3\cdot b + e = 6 \\ \wedge & 2\cdot a + 4\cdot b + e = 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} & 2\cdot c + 3\cdot d + f = 3 \\ \wedge & 3\cdot c + 3\cdot d + f = 3 \\ \wedge & 2\cdot c + 4\cdot d + f = 7 \end{array} .$$

<u>Lösung:</u> $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Der Fall, dass das Zentrum der Ursprung des Koordinatensystems ist, ist natürlich besonders einfach (e=0 ; f=0).

Zu Lernabschnitt 4:

Folgende Programme sind hilfreich einsetzbar:

1. Umwandlerprogramme:
   ASCII ↔ DUAL
   Dual ↔ Dezimal
   ASCII ↔ ISO
2. EAN-Interpreter mit folgenden Ausgaben:
   - Prüfziffer falsch
   - Ware nicht im Programm
   - Ware, Preis
3. Strichcodeleser aus 'Messen-Steuern-Regeln' (ITG)
4. Buchstabenhäufigkeitsanalyse eines Textes aus einer Textdatei.

Literaturhinweis: 1. Prüfziffern und Strichcode (Mathematik lehren/Heft 33)
2. Der Goldkäfer & andere Geschichten (E.A.Poe)
3. Matrizen im WPF (E. Lehmann)

EAN (Europäische Artikel-Nummer):

Der EAN - Code ist ein 13-stelliger Zahlencode mit folgendem Aufbau:

40 05500 25606 9 (Beispiel)

9 – Prüfziffer
25606 – Artikelnummer
05500 – Betriebsnummer
40 – Ländernummer

Der Code wird in der strengen Einteilung nicht immer so eingehalten; Gegenbeispiele sind z.B. die Codes auf verpackten Frischwaren.

Die Prüfziffernbildung:

```
 4   0   0   5   5   0   0   2   5   6   0   6   p      (Beispiel)
·1  ·3  ·1  ·3  ·1  ·3  ·1  ·3  ·1  ·3  ·1  ·3  ·1
 4 + 0 + 0 +15 + 5 + 0 + 0 + 6 + 5 +18 + 0 +18 + p = 71 + p = 80
```

, also: **p = 9** !

Fehlerhäufigkeit:
a) Ziffer zu viel oder zu wenig
b) falsche Ziffer (wird erkannt, da 1 u. 3 alle Reste modulo 10 einmal annehmen)
c) Zahlendreher (wird erkannt, außer wenn die beiden benachbarten Zahlen sich um 5 unterscheiden)

Beispiele und Aufgaben sind in dem Text zu 1. reichlich enthalten, ebenso alles Wesentliche über die ISBN, die ein prinzipiell sichereres Prüfziffernverfahren benutzt, auch wenn es aufwendiger zu berechnen ist (Basiszahl 11).

Beispiel einer Codierung und Decodierung mit Hilfe einer 2×2 - Matrix (Der Einfachheit halber sei nur das kleine Alphabet benutzt):

Codematrix: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Decodiermatrix: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	lz
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

<u>Text:</u>	**j**	**o**	**a**	**c**	**h**	**i**	**m**		**r**	**i**	**c**	**h**	**t**	**e**	**r**	15 Zeichen, also wird am
	9	14	0	2	7	8	12	26	17	8	3	7	19	4	17	Ende ein lz ergänzt;

		9	0	7	12	17	3	19	17							
		14	2	8	26	8	7	4	26							
2	1	32	2	22	50	42	13	42	60	mod	5	2	22	23	15	13	15	6
1	1	23	2	15	38	25	10	23	43	27	23	2	15	11	25	10	23	16
											f	c	w	x	p	n	p	g
											x	c	p	l	z	k	x	q

<u>Verschlüsselter Text:</u> **f x c c w p x l p z n k p x g q**

Mit der Decodiermatrix wird auf gleiche Weise der Text wieder entschlüsselt.

Zur Frage nach der Gewinnung der Decodiermatrix zu einer gegebenen Codematrix sind folgende Gedanken zu berücksichtigen:

1. Besonderheit der Einheitsmatrix bei der "Multiplikation" (Verschlüsselung) ($E \circ M = M$).
2. Was passiert, wenn die Codematrix mit der Decodiermatrix "multipliziert" (verschlüsselt) wird und umgekehrt? ($C \circ D = D \circ C = E$)
3. Es wird offensichtlich eine Matrix D gesucht, die mit C "multipliziert" gerade E ergibt. Dies führt aber bei 2×2-Matrizen (mit 4 Platzhaltern) auf ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen.
4. Über die naive Klärung der Frage der Existenz und Eindeutigkeit des Gleichungssystems kann dann auch die Frage nach geeigneten Matrizen zur Codierung behandelt werden.

Gedacht ist an einen rechnerischen Einstieg im Umgang mit Matrizen und an eine Festigung des Umgangs mit LGS im Rahmen der Klasse 9, nicht aber an eine Vertiefung der Matrizenmultiplikation. Auch an Vollständigkeit der Betrachtung oder gar Vorwegnahme von Teilen des Wahlgebiets aus MA-3 ist natürlich nicht gedacht.

Klasse 10

(60 Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Darstellung von Körpern**	15 Stunden	41
2	**Schalt- und Aussagenalgebra**	15 Stunden	43
3	**Beschreibende Statistik**	15 Stunden	46
4	**Geometrie:** Konstruktion gotischer Kirchenfenster	15 Stunden	49

Vorbemerkung:

Unter dem Gesichtspunkt, dass in den zusätzlich zur Verfügung stehenden Stunden Inhalte der späteren Jahrgangsstufen nicht vorgezogen unterrichtet werden dürfen, sondern Raum geboten wird u.a. für:

1) inhaltliche und methodische Vertiefungen bei aktuell behandelten Themen,
2) Erweiterung der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in bezug auf Inhalte, für die bisher wenig Zeit blieb,
3) mehr problem- und projektorientierte Unterrichtsformen in Verbindung mit einem größeren Maß an Eigentätigkeit bzw. selbständiger Erarbeitung in Gruppen,
4) Verbindungen zu anderen Fächern; stärkere Betonung von mathematischen Problemstellungen in Anwendungssituationen,
5) historische Bezüge, die ein allgemeinbildendes Verständnis von Mathematik als (z.T. geisteswissenschaftliche) Kulturtechnik in der Entwicklung, z.T. repräsentiert in Personen, darstellen,
6) einen verständigen Umgang mit mathematischen 'Werkzeugen' (Taschenrechner, Computersoftware etc.) mit der Notwendigkeit, gelieferte Ergebnisse auf Tragfähigkeit analysieren und beurteilen zu können,

zielen die 4 Lernabschnitte auf folgende Aspekte der Vertiefung:

Thema 1 (Bezug zu Bildende Kunst) soll einerseits über perspektivische Darstellungen und die zugehörigen Projektionen von Körpern in Tafelebenen die Raumanschauung weiter vertiefen, andererseits erzwingt die intendierte Ästhetik der Graphiken ein hohes Maß sauberer Handhabung geometrischen Materials. Auch die Bestimmung wahrer Größen von Streckenlängen, Winkelmaßen etc erfordert Präzision in der Detailarbeit. Erwünschte Nebeneffekte sind eine verständigere Möglichkeit der Darstellung von Körpern und eine bessere Beurteilung raumgeometrischer Sachverhalte in der Einheit des Normalzuges: Körperberechnungen.

Thema 2 baut zum einen auf Elementen der Unterrichtseinheiten aus Klassenstufe 7: 'Zahlen' (Dualzahlen) und 'Sprache und Logik' auf, zum anderen knüpft es mit deutlichen Bezügen zu ITG und Informatik an den Lernabschnitt der vorherigen Klassenstufe: 'Codierung und Verschlüsselung' an. Neben dem (mathematischen) Zielen des Verständnisses für Grundelemente der Booleschen Algebra ist auch beabsichtigt auf Fragen der technischen Realisation von Schaltungen (z.B. Halbaddierer) aus einigen Grundbausteinen einzugehen.

Thema 3: Die Auswertung von Daten und die Beurteilungsfähigkeit der Aussagekraft des aufbereiteten Materials ist ein zentrales Anliegen der täglichen Alltagserfahrung. In diesem Bereich wird bekanntlich in den Medien viel Unsinniges angeboten, das oft in den Bereich von Datenmanipulation hineinreicht. Neben der Entwicklung von Beurteilungskompetenz in bezug auf vorgegebene Graphiken, absolute und relative Größen, Mittelwerte etc werden Fertigkeiten geschult, die gewinnbringend auch in anderen Fächern (z.B. Erdkunde) genutzt werden können. Darüber hinaus werden Grundlagen für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe 2 vorbereitet.

Thema 4: Neben dem fachübergreifenden Aspekt sind hier insbesondere problemlösende Unterrichtsformen das Ziel. Die Analyse und konstruktive Bearbeitung gotischer Formen fordert ein breites Fundament geometrischer Kenntnisse (Sätze) und Fertigkeiten und eignet sich deshalb besonders, neben dem sicherlich vorhandenen motivierenden Aspekt, zur zusammenfassenden Abrundung des Geometrieunterrichtes der Sekundarstufe 1.

Darstellung von Körpern

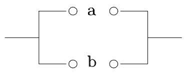
15 Stunden

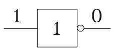
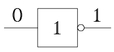
Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Zu gegebenen Körpern (Modelle) Grundriss und Aufriss angeben können. Eigenschaften der senkrechten Parallelprojektion kennen und begründen können.	Senkrechte Zweitafelprojektion mit Grundriss und Aufriss Eigenschaften der (senkrechten) Parallelprojektion: - Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet, - eine Projektionsgerade (zur Bildebene senkrechte Gerade) wird auf einen Punkt abgebildet, - Figuren, die in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegen, werden auf kongruente Figuren abgebildet.	Sind keine geeigneten Modelle vorhanden, können auch Schrägbilder und Risse des gleichen Körpers einander zugeordnet werden. Zusätzlich können, je nach Zeitbedarf bzw Schwerpunktsetzung, auch Seitenrisse (Dreitafelprojektion) betrachtet werden.
Ein Konstruktionsverfahren für Schrägbilder herleiten und verständig anwenden können. Konstruktionen sauber und exakt durchführen können.	Schräge Parallelprojektion: Gewinnung von Schrägbildern eines Körpers in der Aufrissebene bei gegebenem Grund- und Aufriss durch Konstruktion der Durchstoßpunkte von Projektionsstrahlen.	Eine ausführliche Beschreibung und Analyse des Verfahrens sowie reichhaltiges Beispielmaterial findet man in (1) (siehe Anhang). Einen Schwerpunkt der Einheit bildet die Übung in genauem, sauberen Zeichnen. Hierfür sollte ausreichend Zeit eingeplant werden.
Aus Grund- und Aufriss der Projektionsstrahlen, sowie aus dem Schrägbild, die Blickrichtung erkennen können. Angeben können, welche Maße des Körpers im Schrägbild in wahrer Größe erscheinen.	Abbildung des gleichen Körpers bei unterschiedlichen Projektionsrichtungen.	Insbesondere durch diesen Aspekt soll die Raumanschauung geschult werden.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Den Schatten eines in der Grundrissebene stehenden Körpers bei vorgegebener Lichtrichtung konstruieren können.	Schattenkonstruktionen, z.B. die Ellipse als Kugelschatten.	Hier kann man sich bei Zeitknappheit auf einen der beiden Inhalte beschränken.
Die wahren Maße einer durch Grund- und Aufriss gegebenen Figur, eventuell nach Drehung in eine ausgezeichnete (rissebenenparallele) Lage bestimmen können.	Konstruktive Bestimmung von Maßen (Schwenkung / Klappung).	

Schalt- und Aussagenalgebra

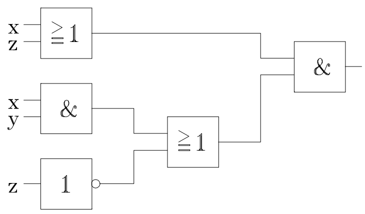
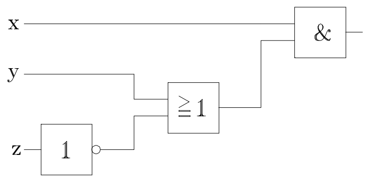
15 Stunden

<table>
<tr><th>Lernziele</th><th>Lerninhalte</th><th>Erläuterungen</th></tr>
<tr>
<td>Wissen, und mit entsprechender Symbolik angeben können, dass Schalter durch die beiden Schalterzustände "offen" bzw "geschlossen" charakterisiert werden.</td>
<td>Geschlossener Schalter:
 , Symbol: 1;
offener Schalter:
 , Symbol: 0.</td>
<td>Von den schematischen Darstellungen der Schalterzustände sollte sparsam Gebrauch gemacht werden.</td>
</tr>
<tr>
<td>Verknüpfungen für Schalter benennen und mit entsprechender Symbolik darstellen können.</td>
<td>Reihenschaltung: (a, b ∈ {0,1})
 , Symbol: a·b;
Parallelschaltung:
 , Symbol: a+b.</td>
<td>Zwischen dem Namen des Schalters und der Variablen für seinen Schalterzustand sollte nicht unterschieden werden.

Hier und im folgenden ist es wünschenswert, mit entsprechenden elektronischen Bauelementen praktische experimentelle Erfahrungen zu sammeln.</td>
</tr>
<tr>
<td>Die Wirkung eines NICHT-Gatters angeben können.</td>
<td>NICHT-Gatter:
 , $\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$;
 , $\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Wissen und begründen können, dass die Reihenschaltung die Verknüpfung "∧", die Parallelschaltung die Verknüpfung "∨", das NICHT-Gatter die Verknüpfung "¬" realisiert, und dass die entsprechenden Wahrheitswerte über Schaltungen ermittelt werden können (Isomorphie von Schalt- und Aussagenalgebra).</td>
<td>Verknüpfungstafeln für "·", "+" und das NICHT-Gatter;
Vergleich mit den Wahrheitswertetafeln für die aussagenlogischen Verknüpfungen "∧", "∨" und "¬" :
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>a·b</th><th>a∧b</th><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>f</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>f</td><td>f</td><td>w</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>f</td><td>f</td><td>f</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>a+b</th><th>a∨b</th><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>w</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>w</td><td>f</td><td>w</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>f</td><td>f</td><td>f</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>a</th><th>ā</th><th>¬a</th><th>a</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>f</td><td>w</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>w</td><td>f</td></tr>
</table>
Es gilt also: a·b entspricht a∧b,
a+b entspricht a∨b,
ā entspricht ¬a .</td>
<td>Die Wahrheitswertetafeln für die aussagenlogischen Verknüpfungen "∧", "∨" und "¬" sind bereits aus Klasse 7 bekannt.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Lernziele</th><th>Lerninhalte</th><th>Erläuterungen</th></tr>
<tr>
<td>Wissen, und mittels entsprechender Schaltungen darstellen können, dass sowohl für die Konjunktion, "$\wedge$", als auch für die Disjunktion, "$\vee$", das Kommutativ- und das Assoziativgesetz gelten.</td>
<td>Kommutatativgesetze:
$a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$;
Assoziativgesetze:
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

Verknüpfungstafeln durch entsprechende Schaltungen, z.B.:
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>$a \cdot b$
$a \wedge b$</th><th>$b \cdot a$
$b \wedge a$</th><th>$a+b$
$a \vee b$</th><th>$b+a$
$b \vee a$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1
w</td><td>1
w</td><td>1
w</td><td>1
w</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0
f</td><td>0
f</td><td>1
w</td><td>1
w</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0
f</td><td>0
f</td><td>1
w</td><td>1
w</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0
f</td><td>0
f</td><td>0
f</td><td>0
f</td></tr>
</table>
</td>
<td>Für die Lösung von Sachproblemen mittels Aussageverknüpfungen müssen diese durch Anwendung algebraischer Gesetze vereinfacht werden. Es genügt, diese prinzipielle Möglichkeit an ausgewählten Beispielen zu verdeutlichen.
Auch eine Äquivalenz von verschiedenen Aussageverknüpfungen läßt sich auf diese Weise feststellen.</td>
</tr>
<tr>
<td>Die verknüpfungsspezifischen Gesetze vom neutralen Element und vom inversen Element kennen und angeben können.</td>
<td>Gesetze vom neutralen Element:
$a \wedge 1 = a$, $a \vee 0 = a$;
Gesetze vom inversen Element:
$a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$.</td>
<td>Die Gültigkeit beider Gesetze kann auch durch entsprechende Schaltungen veranschaulicht werden.</td>
</tr>
<tr>
<td>Das konjunktive und das disjunktive Distributivgesetz formulieren und die jeweilige Gültigkeit nachweisen können.</td>
<td>Konjunktives Distributivgesetz:
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
disjunktives Distributivgesetz:
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Die DeMorganschen Gesetze formulieren und mit Hilfe von Verknüpfungstafeln beweisen können.</td>
<td>1. DeMorgansches Gesetz:
$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$;
2. DeMorgansches Gesetz:
$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$;
Nachweis durch Erstellung entsprechender Wahrheitswertetafeln.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Die Äquivalenz der Subjunktion: $a \rightarrow b$ und deren Negation: $\neg(a \rightarrow b)$ mit den aussagenlogischen Verknüpfungen: $\neg a \vee b$ bzw $a \wedge \neg b$ angeben und beweisen können.	Subjunktion und ihre Negation. Es gilt: $a \rightarrow b = \neg a \vee b$; $\neg(a \rightarrow b) = a \wedge \neg b$. Nachweis durch Vergleich der Wahrheitswertetafeln; inhaltliche Interpretation durch geeignete Beispiele.	
Die aussagenlogische Definition der Bijunktion kennen, entsprechende Wahrheitswerte angeben und bijunktive Aussagen sprachlich formulieren können.	$a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$; Äquivalenzbeweis durch Anwendung algebraischer Gesetze: $a \leftrightarrow b = (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$; Zum Sprachgebrauch: $a \leftrightarrow b$ ist genau dann wahr, wenn a denselben Wahrheitswert wie b hat.	$(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a) =$ $[(\neg a \vee b) \wedge \neg b] \vee [(\neg a \vee b) \wedge a)] =$ $[(\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b)] \vee$ $[(\neg a \wedge a) \vee (\neg a \wedge \neg b)]$
In exemplarischen Fällen zu vorgegebenen Schaltungen bzw Schaltbildern den zugehörigen algebraischen Term angeben und über Wahrheitswertetafeln minimieren können.	Vereinfachung von Schaltungen in exemplarischen Fällen, z.B.:  Algebraischer Weg: $(x \vee z) \wedge [(x \wedge y) \vee \neg z] = \ldots =$ $= x \wedge (y \vee \neg z)$. Vereinfachte Schaltung:  	In Anknüpfung an das Rechnen im Dualsystem in Klassenstufe 7 bietet sich (nach Zeit) auch die experimentelle Verwirklichung eines Halbaddierers an.

Beschreibende Statistik

15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Aus vorgegebenen statistischen Listen (Daten), Tabellen oder Diagrammen entsprechende merkmalsbezogene Häufigkeiten einer Häufigkeitsverteilung ablesen können. An Beispielen den Unterschied von relativer und absoluter Häufigkeit erklären und bei vorgegebenem Umfang der Stichprobe Häufigkeitsmaßzahlen in die jeweils andere Darstellungsform umrechnen können. Stichproben in Bezug auf merkmalsbezogene Ergebnisse durch Angabe zugehöriger absoluter und relativer Häufigkeiten auswerten können. Zur Unterscheidung der Begriffe: Merkmalsträger, Merkmal und Merkmalsausprägung Beispiele angeben können.	Häufigkeiten bestimmter Merkmale in Stichproben, die in Form von Daten oder graphischen Darstellungen gegeben sind; Zugehörige Begriffe: - Stichprobe, - Merkmal, - absolute Häufigkeit, - relative Häufigkeit, - Umfang der Stichprobe - Häufigkeitsverteilung, - Merkmalsträger, - Merkmalsausprägung. Numerische Auswertung von Stichproben durch Ermittlung geeigneter Häufigkeitsverteilungen.	Bei der Auswahl der Beispiele sollte auf aktuellen Bezug (Presse - Medien) sowie die momentane, altersgemäße Interessenlage der Lerngruppe geachtet werden. Neben aktuellem Material aus Tageszeitungen sind in der im Anhang aufgeführten Literatur eine Fülle geeigneter Fragestellungen zu finden. Beispiel: M.-träger: Person, Auto, Landschaftsregion; Merkmal: Wappen, Beruf, Farbe, Niederschlag; M.-ausprägung: Handwerker, Kaufmann etc.
Daten in Klassen einteilen und die zugehörigen Skalen angeben können. In Beispielen (von Klasseneinteilungen) die verwendeten Skalen charakterisieren können.	Klasseneinteilung von Daten - Skalen von Merkmalen: - Nominalskala (Religionszugehörigkeit, Geschlecht) - Rangskala (Güteklassen, Dichte verschiedener Stoffe) - Metrische Skala (Brenndauer von Glühlampen, Längen).	Die Begriffe: Merkmal und Skala können schon vorher bei der Erarbeitung der Grundlagen einfließen.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Stichproben merkmals- und klassenbezogen graphisch auswerten können. Aus graphischen Darstellungen beispielhaft Rückschlüsse auf konkrete, absolute, numerische Aussagen ziehen können.	Graphische Darstellungen statistischer Erhebungen: - Stabdiagramm - Kreisdiagramm - Säulendiagramm - Liniendiagramm	
Typische Fehler in graphischen Darstellungen analysierend benennen können.	Subjektive Wirkung graphischer Darstellungen statistischer Erhebungen und konkreter Aussagegehalt dieser Darstellungen; typische Fehler in graphischen Darstellungen.	Hier ist Alltagsbezug unverzichtbar. Fehler z.B.: Kein wohldefinierter Ursprung, keine äquidistanten Achsenmaßstäbe, fehlerhafte Bezugsgrößen etc.
Die Definitionen unterschiedlicher Mittelwerte kennen und für exemplarische Beispiele diese Mittelwerte berechnen können. Die Aussagekraft unterschiedlicher Mittelwerte in geeigneten Beispielen bewerten können. Abweichungen von Mittelwerten durch geeignete Streuungsmaße beispielhaft quantifizieren können.	Mittelwerte bei statistischen Erhebungen: - Modalwert (häufigster Wert), - Zentralwert ('Mitte' geordneter Listen), - Arithmetisches Mittel $a := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, - Geometrisches Mittel $g := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, - Harmonisches Mittel $h := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$. Streuungsmaße: - Spannweite $w := \lvert x_{max} - x_{min} \rvert$, - Grundspanne T_x (Der Stichprobenbereich, in dem vom Mittelwert (Median) jeweils nach unten und oben 45% aller beobachteten Werte liegen), - Mittlere Abweichung $d := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{x} \rvert$, - Mittlere quadratische Abweichung $s := \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$.	Bei dem für diese Unterrichtseinheit vorgesehenen zeitlichen Gesamtumfang kann hier selbstverständlich keine Vollständigkeit und gesicherte Handlungskompetenz angestrebt werden. Demzufolge ist nur an einen verständigen Einblick in die Gesamtproblematik von Mittelwerten und Streuungsmaßen gedacht, was ein durchgängig exemplarisches Vorgehen bedingt.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Statistische Erhebungen (Urlisten) graphisch und rechnerisch exemplarisch unter verschiedenen Gesichtspunkten (Mittelwerte / Streuung) auswerten können.	Anwendungsaufgaben komplexerer Art.	Hier kommen u.a. auch selbständige Erhebungen durch die Schüler in Frage. Auf jeden Fall ist an ein großes Maß selbständiger Arbeit gedacht.

Geometrie: Konstruktion gotischer Kirchenfenster

15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Eine Herleitung für die Größe des Radius r von n inneren Berührkreisen eines Außenkreises (mit Radius R) über trigonometrische Funktionen mit dem Ergebnis: $r = \frac{\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} \cdot R$; $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ verständig nachvollziehen können. Die Größe des Radius r von n inneren Berührkreisen exemplarisch in Sonderfällen (z.B. n = 3,4,6,8) rechnerisch ohne trigonometrische Funktionen bestimmen können. Exemplarisch die Größe des Radius von Berührkreisen nur mit Zirkel und Lineal bestimmen können.	Konstruktion kreisförmiger gotischer Fenster mit der Bestimmung von Kreismittelpunkten und Radien einbeschriebener Berührkreise und -bögen durch: a) Konstruktion mit Zirkel und Lineal b) Streckenlängenberechnung; mit den 2 wesentlich verschiedenen Reihenfolgen: 1) zuerst Umkreis, dann innere Berührkreise, 2) zuerst innere Berührkreise, dann Außenkreis.	Die Einheit: Trigonometrie, inklusive der Additionstheoreme, sollte unterrichtlich behandelt worden sein. Bei der Fülle möglicher Problemstellungen wird man eine sinnvolle Auswahl treffen müssen, wobei natürlich die gängigen Grundformen wie Dreipass, Vierpass, Fischblasenmuster etc auf jeden Fall berücksichtigt werden sollten. Beschränken muß man sich bei der Behandlung komplexerer "Füllmuster" mit unterschiedlichen Formen. Richtwert eines zeitlichen Rahmens für den nebenstehenden Abschnitt sind 5 Unterrichtsstunden.
Kreisförmige gotische Kirchenfenster, einerseits auf der Basis vorgegebener n-Ecke als Mittelpunkte innerer Berührkreise, andererseits bei Vorgabe des Außenkreises sauber konstruieren können.	Konstruktion (und Analyse) komplexerer "Füllmuster" in exemplarischen Fällen.	Bei der Konstruktion ist auf besondere Präzision in der Maßübertragung und der Handhabung geometrischen Materials zu achten.

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Wissen, dass die Kreismittelpunkte der Kreisbögen, die einen (symmetrischen) Spitzbogen bilden, auf der Trägergeraden der Kämpferlinie (Länge: k) liegen. Bei vorgegebenem Spitzbogen (mit einfachem Füllmuster) aus Symmetrien, Berührpunkten, Höhe des Spitzbogens etc, Mittelpunkte und Radien von Kreisen und Kreisbögen (rechnerisch) bestimmen und nachfolgend entsprechend konstruieren können.	Analyse und Konstruktion spitzbogenförmiger gotischer Fenster mit der Bestimmung von Kreismittelpunkten und Radien einbeschriebener Berührkreise und -bögen durch: a) Konstruktion mit Zirkel und Lineal b) Streckenlängenberechnung in einfachen Fällen.	Hier ist zunächst daran gedacht, vorgegebene Spitzbögen zu analysieren und im Sinne von Problemlösen experimentell eine Konstruktionsvorschrift zu finden. - Dabei soll insbesondere das Berührproblem als zentraler Punkt der Aufgabenstellung erkannt werden Als Beispiel einer ersten Analyse und Konstruktion kommt in Frage: Spitzbogen, mit 2 symmetrischen einbeschriebenen Spitzbögen halber Breite und oberem, inneren Berührkreis.
Das Taktionsproblem des Appolonius kennen und mit Hilfe einer Skizze erläutern können. Im konkreten Fall bei Vorgabe eines Koordinatensystems sowie der Mittelpunkte und Radien dreier Kreise, Mittelpunkt und Radius eines Berührkreises durch Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystem bestimmen können.	Das Berührkreis- (Taktions-) problem des Appolonius in analytischer Form: - die x-Achse verläuft durch die Mittelpunkte zweier Kreise; einer dieser Mittelpunkte bildet den Ursprung des Koordinatensystems, - Bestimmung von Mittelpunkt und Radius des Berührkreises durch Lösung eines Gleichungssystems von 3 Gleichungen in 3 Variablen, - Variation der Berührbedingungen: innen / außen.	Für die Behandlung des allgemeinen Taktionsproblems mit rein geometrischen Methoden fehlen spezielle Voraussetzungen und natürlich Zeit. Intendiert ist jedoch eine Vertiefung und Verallgemeinerung des in den vorherigen Stunden aufgeworfenen Berührproblems, das durch Einführung von Koordinaten einer prinzipiellen Lösung zugeführt werden kann. Es ist sicher ausreichend, dies an einigen Beispielen konkret durchzurechnen.
Gotische Kirchenfenster komplexerer Art in exemplarischen Fällen konstruktiv analysieren und entsprechende Skizzen anfertigen können.	Analyse und Konstruktion gotischer Kirchenfenster komplexerer Art in exemplarischen Fällen.	Es bietet sich an, Schüler mit geeigneten Fenstern von Kirchen aus ihrem Wohngebiet zu konfrontieren (evtl. Hausaufgabe: Photos erstellen). Ansonsten bietet die Literatur (siehe Anhang) eine Fülle von Beispielen, die zu variablen Problemstellungen geeignet sind.

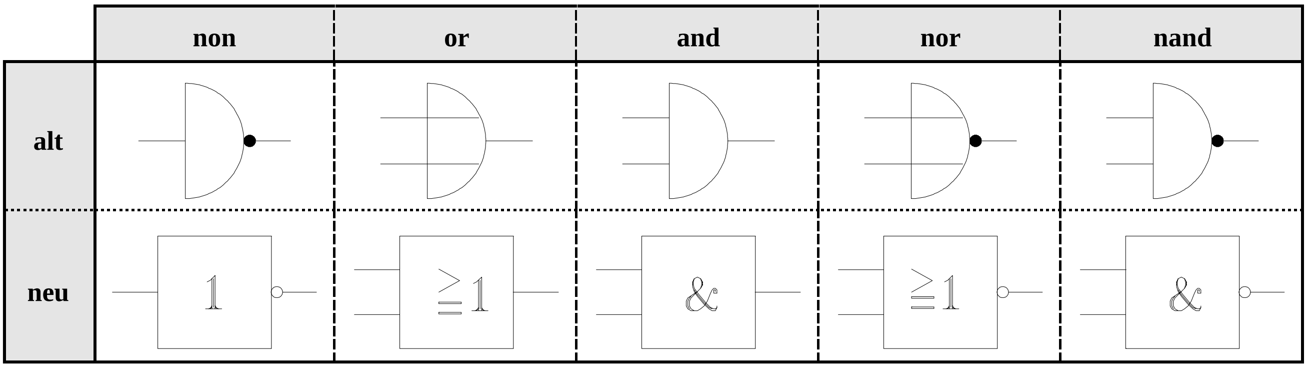
ANHANG

Zu Lernabschnitt 1:

Literaturhinweis:
1. E. Dorschel: Darstellung von Körpern; (BIL [ehemals: PZ], Berlin)
2. Graf / Barner: Darstellende Geometrie; (UTB)
3. Mathematik heute 10; (Schroedel)

Zu Lernabschnitt 2:

Zu diesem Lernabschnitt steht eine Fülle geeigneter Literatur zur Verfügung, die das Thema einerseits von dem mathematischen Gesichtspunkt der Booleschen Algebra und der Aussagenlogik beleuchtet, andererseits den Zugang vom informationstechnisch-elektronischen darstellt. Zur Umsetzung der intendierten Verbindung dieser beiden Aspekte ist ein eigenes didaktisches Konzept erforderlich. Zu achten ist insbesondere auch auf eine der DIN-Norm gerechte Darstellung von Schaltbildern, da in älterer Literatur noch oft nicht mehr zulässige Schaltsymbole zu finden sind.



Die nachfolgende Auswahl von z.T. älterer Literatur, die den Autoren leicht zugänglich war, soll nur eine Orientierungshilfe darstellen. Gegebenenfalls ist auf entsprechende Neuauflagen zurückzugreifen.

Literaturhinweis:
1. Stumpf / Whitesitt: Einführung in die Boolesche Algebra; (Kolleg-Text)
2. Jehle: Boolesche Algebra; (bsv)
3. Themenhefte Mathematik: Boolesche Algebra; (Klett)
4. Schick: Aussagenlogik; (Herder)

Zu Lernabschnitt 3:

In jedem Buch zur Stochastik ist ein Kapitel zur Beschreibenden Statistik zu finden. Bei der Verwendung dieser Literatur ist jedoch auf das Alter der Lerngruppe (Sekundarstufe 1) zu achten. Auf keinen Fall darf einem späteren Unterricht der Stochastik vorgegriffen werden. Aus diesem Grunde ist eine begriffliche Verbindung von relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeits-maßen hier nicht am Platze.

Von allen zur Verfügung stehenden geeigneten Schriften seien im folgenden nur einige den Autoren zugängliche, und leicht in Unterricht zu übertragende Materialien genannt.

Literaturhinweis:
1. Schriftenreihe des Instituts für Lehrerfort- und Weiterbildung Mainz (ILF), Heft 18: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung - Handreichung zum Grundkurs der Mainzer Studienstufe;
2. Schmidt u.a.: Mathematik S2, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung G; (Herder)
3. Mathematik heute, Grundkurs Stochastik; (Schroedel)

Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, dass selbstverständlich die verständige Beurteilungsfähigkeit von statistischen Aussagen in Presse und Medien ein übergeordnetes Unterrichtziel darstellt. Die Einbeziehung von Materialien aus der Tagespresse sollte im Unterricht den entsprechenden Stellenwert besitzen. - Im folgenden 2 anwendungsorientierte Beispiele zu Mittelwerten:

1. Beispiel (Geometrisches Mittel):
Der Wertverlust eines PKW gegenüber dem jeweiligen Vorjahr beträgt im ersten Jahr 30%, im 2. Jahr 15%, im 3. Jahr noch 5%. Der durchschnittliche jährliche Wertverlust beträgt wegen $g := \sqrt[3]{0{,}70 \cdot 0{,}85 \cdot\cdot 0{,}95} \approx 0{,}826$ ca. 17,4%.

2. Beispiel (Harmonisches Mittel):
Eine Firma importiert aus verschiedenen Ländern den Rohstoff X für je DM 60000,--. Die Einfuhrpreise sind:
Land A: DM 24,-- / Einheit Land B: DM 25,-- / Einheit Land A: DM 20,-- / Einheit.
Der durchschnittlich gezahlte Preis ist $h := \dfrac{3}{\frac{1}{24}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}} \approx 22{,}78$ (DM).

Zu Lernabschnitt 4:

Literaturhinweis:
1. Gotische Maßwerkfenster im Geometrieunterricht; (MU 41 (1995) Heft 3; Klett-Verlag)
2. I. Hachtel: Mathematik an Kirchenfenstern; (MNU 49 (1996) Heft 8; Dümmler-Verlag)
3. A. Gerlach: Das Maßwerk im geometrischen Unterricht; (Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 39. Jg., Leipzig und Berlin 1908)
4. Ungewitter: Lehrbuch der gotischen Konstruktionen Band 1 (Text) / Band 2 (Zeichnungen in DIN A3); (*alte Bücher: ~1860*, in Staatsbibliothek Berlin verfügbar)
5. B. Artmann: Gothic Geometric Windows / The Cloisters of Hauterive; (The Mathematical Intelligencer, Jg. 13 (1991), Heft 2; Springer-Verlag New York)

Für diesen Lernabschnitt steht einerseits einige neuere, geeignete (didaktische) Literatur zur Verfügung, andererseits bieten auch ältere Bücher eine Fülle von Anregungen. Darüber hinaus bietet sich das Gespräch mit Kolleginnen und Kollegen aus dem Fachbereich Bildende Kunst an, die möglicherweise auch Zugriff auf entsprechendes Bildmaterial (Graphiken) ermöglichen können.

Das oben angeführte Heft: **M**athematik-**U**nterricht (1) ist als einführende Literatur sehr zu empfehlen, beleuchtet es doch insbesondere das Thema nicht nur aus didaktischer, sondern auch aus methodischer (Problemlösesituationen) Sicht und gibt dafür einige praktische Unterrichtsvorschläge.

Als Vorlage für den ersten, 5-stündigen Teilabschnitt über kreisförmige Fenster eignet sich besonders der Artikel von Frau Inge Hachtel (2). Besonders reizvolle Fenster sind im Artikel von Herrn Benno Artmann über das Kloster von Hauterive zu finden.

Für die Fortsetzung kann man sich gut an dem Text und den Vorschlägen von Alfred Gerlach (3) orientieren, allerdings ist sicher, vor dem Hintergrund der zur Verfügung stehenden Zeit, eine Reduktion und gezielte Auswahl aus den Möglichkeiten notwendig.

Die beiden (alten) Bände von R. Ungewitter (4) sind keine mathematischen Bücher sondern wohl eher dem Adressatenkreis: Künstler - Architekt zuzuordnen, d.h. die Konstruktionsvorschriften in Band 1 im Kapitel II (S. 28 - S. 85) über das Maßwerk liefern Konstruktionsrezepte, die sich auf hervorragende Skizzen im Band 2 (Tafel 3 - Tafel 7) beziehen. Dennoch kann insbesondere mit diesem Material eine anwendungsorientierte Brücke geschlagen werden, die zum Mathematisieren auffordert.

Zusammenfassend sei noch einmal bemerkt, dass bei der Fülle des angebotenen Materials bzw der Problemstellungen selbstverständlich keine vollständige unterrichtliche Behandlung angestrebt werden kann. Vielmehr kommt es in diesem

Lernabschnitt auf Problemlösefähigkeit, Mathematisieren, strategische Anwendung von Kenntnissen und Methoden aus dem Unterricht der Sekundarstufe 1 an (Satzgruppe des Pythagoras, Ähnlichkeitslehre, Irrationalität-Inkommensurabilität, Trigonometrie, Gleichungslehre etc).