

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
<p>Eine Herleitung für die Größe des Radius r von n inneren Berührungskreisen eines Außenkreises (mit Radius R) über trigonometrische Funktionen mit dem Ergebnis: $r = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} \cdot R$; $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ verständlich nachvollziehen können.</p> <p>Die Größe des Radius r von n inneren Berührungskreisen exemplarisch in Sonderfällen (z.B. $n = 3,4,6,8$) rechnerisch ohne trigonometrische Funktionen bestimmen können.</p> <p>Exemplarisch die Größe des Radius von Berührungskreisen nur mit Zirkel und Lineal bestimmen können.</p> <p>Kreisförmige gotische Kirchenfenster, einerseits auf der Basis vorgegebener n-Ecke als Mittelpunkte innerer Berührungskreise, andererseits bei Vorgabe des Außenkreises sauber konstruieren können.</p>	<p>Konstruktion kreisförmiger gotischer Fenster mit der Bestimmung von Kreismittelpunkten und Radien einbeschriebener Berührungskreise und -bögen durch:</p> <p>a) Konstruktion mit Zirkel und Lineal b) Streckenlängenberechnung;</p> <p>mit den 2 wesentlich verschiedenen Reihenfolgen:</p> <p>1) zuerst Umkreis, dann innere Berührungskreise, 2) zuerst innere Berührungskreise, dann Außenkreis.</p> <p>Konstruktion (und Analyse) komplexerer "Füllmuster" in exemplarischen Fällen.</p>	<p>Die Einheit: Trigonometrie, inklusive der Additionstheoreme, sollte unterrichtlich behandelt worden sein.</p> <p>Bei der Fülle möglicher Problemstellungen wird man eine sinnvolle Auswahl treffen müssen, wobei natürlich die gängigen Grundformen wie Dreipass, Vierpass, Fischblasenmuster etc auf jeden Fall berücksichtigt werden sollten.</p> <p>Beschränken muß man sich bei der Behandlung komplexerer "Füllmuster" mit unterschiedlichen Formen. Richtwert eines zeitlichen Rahmens für den nebenstehenden Abschnitt sind 5 Unterrichtsstunden.</p> <p>Bei der Konstruktion ist auf besondere Präzision in der Maßübertragung und der Handhabung geometrischen Materials zu achten.</p>
<p>Wissen, dass die Kreismittelpunkte der Kreisbögen, die einen (symmetrischen) Spitzbogen bilden, auf der Trägergeraden der Kämpferlinie (Länge: k) liegen.</p> <p>Bei vorgegebenem Spitzbogen (mit einfachem Füllmuster) aus Symmetrien, Berührungspunkten, Höhe des Spitzbogens etc, Mittelpunkte und Radien von Kreisen und Kreisbögen (rechnerisch) bestimmen und nachfolgend entsprechend konstruieren können.</p>	<p>Analyse und Konstruktion spitzbogenförmiger gotischer Fenster mit der Bestimmung von Kreismittelpunkten und Radien einbeschriebener Berührungskreise und -bögen durch:</p> <p>a) Konstruktion mit Zirkel und Lineal b) Streckenlängenberechnung</p> <p>in einfachen Fällen.</p>	<p>Hier ist zunächst daran gedacht, vorgegebene Spitzbögen zu analysieren und im Sinne von Problemlösen experimentell eine Konstruktionsvorschrift zu finden. - Dabei soll insbesondere das Berührproblem als zentraler Punkt der Aufgabenstellung erkannt werden</p> <p>Als Beispiel einer ersten Analyse und Konstruktion kommt in Frage: Spitzbogen, mit 2 symmetrischen einbeschriebenen Spitzbögen halber Breite und oberem, inneren Berührungskreis.</p>
<p>Das Taktionsproblem des Apollonius kennen und mit Hilfe einer Skizze erläutern können.</p> <p>Im konkreten Fall bei Vorgabe eines Koordinatensystems sowie der Mittelpunkte und Radien dreier Kreise, Mittelpunkt und Radius eines Berührungskreises durch Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystem bestimmen können.</p>	<p>Das Berührungskreis- (Taktions-) problem des Apollonius in analytischer Form:</p> <ul style="list-style-type: none"> - die x-Achse verläuft durch die Mittelpunkte zweier Kreise; einer dieser Mittelpunkte bildet den Ursprung des Koordinatensystems, - Bestimmung von Mittelpunkt und Radius des Berührungskreises durch Lösung eines Gleichungssystem von 3 Gleichungen in 3 Variablen, - Variation der Berührbedingungen: innen / außen. 	<p>Für die Behandlung des allgemeinen Taktionsproblems mit rein geometrischen Methoden fehlen spezielle Voraussetzungen und natürlich Zeit. Intendiert ist jedoch eine Vertiefung und Verallgemeinerung des in den vorherigen Stunden aufgeworfenen Berührproblems, das durch Einführung von Koordinaten einer prinzipiellen Lösung zugeführt werden kann. Es ist sicher ausreichend, dies an einigen Beispielen konkret durchzurechnen.</p>

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Gotische Kirchenfenster komplexerer Art in exemplarischen Fällen konstruktiv analysieren und entsprechende Skizzen anfertigen können.	Analyse und Konstruktion gotischer Kirchenfenster komplexerer Art in exemplarischen Fällen.	Es bietet sich an, Schüler mit geeigneten Fenstern von Kirchen aus ihrem Wohngebiet zu konfrontieren (evtl. Hausaufgabe: Photos erstellen). Ansonsten bietet die Literatur (siehe Anhang) eine Fülle von Beispielen, die zu variablen Problemstellungen geeignet sind.

- Literaturhinweis:
1. Gotische Maßwerkfenster im Geometrieunterricht; (MU 41 (1995) Heft 3; Klett-Verlag)
 2. I. Hachtel: Mathematik an Kirchenfenstern; (MNU 49 (1996) Heft 8; Dümmler-Verlag)
 3. A. Gerlach: Das Maßwerk im geometrischen Unterricht; (Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 39. Jg., Leipzig und Berlin 1908)
 4. Ungewitter: Lehrbuch der gotischen Konstruktionen Band 1 (Text) / Band 2 (Zeichnungen in DIN A3); (*alte Bücher: ~1860*, in Staatsbibliothek Berlin verfügbar)
 5. B. Artmann: Gothic Geometric Windows / The Cloisters of Hauterive; (The Mathematical Intelligencer, Jg. 13 (1991), Heft 2; Springer-Verlag New York)

Für diesen Lernabschnitt steht einerseits einige neuere, geeignete (didaktische) Literatur zur Verfügung, andererseits bieten auch ältere Bücher eine Fülle von Anregungen. Darüber hinaus bietet sich das Gespräch mit Kolleginnen und Kollegen aus dem Fachbereich Bildende Kunst an, die möglicherweise auch Zugriff auf entsprechendes Bildmaterial (Graphiken) ermöglichen können.

Das oben angeführte Heft: **Mathematik-Unterricht** (1) ist als einführende Literatur sehr zu empfehlen, beleuchtet es doch insbesondere das Thema nicht nur aus didaktischer, sondern auch aus methodischer (Problemlösesituationen) Sicht und gibt dafür einige praktische Unterrichtsvorschläge.

Als Vorlage für den ersten, 5-stündigen Teilabschnitt über kreisförmige Fenster eignet sich besonders der Artikel von Frau Inge Hachtel (2). Besonders reizvolle Fenster sind im Artikel von Herrn Benno Artmann über das Kloster von Hauterive zu finden.

Für die Fortsetzung kann man sich gut an dem Text und den Vorschlägen von Alfred Gerlach (3) orientieren, allerdings ist sicher, vor dem Hintergrund der zur Verfügung stehenden Zeit, eine Reduktion und gezielte Auswahl aus den Möglichkeiten notwendig.

Die beiden (alten) Bände von R. Ungewitter (4) sind keine mathematischen Bücher sondern wohl eher dem Adressatenkreis: Künstler - Architekt zuzuordnen, d.h. die Konstruktionsvorschriften in Band 1 im Kapitel II (S. 28 - S. 85) über das Maßwerk liefern Konstruktionsrezepte, die sich auf hervorragende Skizzen im Band 2 (Tafel 3 - Tafel 7) beziehen. Dennoch kann insbesondere mit diesem Material eine anwendungsorientierte Brücke geschlagen werden, die zum Mathematisieren auffordert.

Zusammenfassend sei noch einmal bemerkt, dass bei der Fülle des angebotenen Materials bzw der Problemstellungen selbstverständlich keine vollständige unterrichtliche Behandlung angestrebt werden kann. Vielmehr kommt es in diesem Lernabschnitt auf Problemlösefähigkeit, Mathematisieren, strategische Anwendung von Kenntnissen und Methoden aus dem Unterricht der Sekundarstufe I an (Satzgruppe des Pythagoras, Ähnlichkeitslehre, Irrationalität-Inkommensurabilität, Trigonometrie, Gleichungslehre etc).

Arbeitsblätter: (Klassenstufen 09/10)

- Zum geschichtlichen und geistigen Hintergrund der Gotik gotiktext.pdf
- Vielpässe gotik-1.pdf
- Das Berührkreisproblem gotik-3.pdf
- Bögen und Kreise gotik-2.pdf
- Große und kleine Kreise gotik-5.pdf
- Bögen und Kreise II gotik-4.pdf
- Berührkreisproblem des Apollonius apolloni.pdf
- (Arbelos: Kreisberechnung - Bögen und Kreise II arbelos.pdf)